



北京大学

本科生毕业论文

题目：AdS/CFT对偶性在凝聚态物理中的应用

姓名：杨康

学号：1000010316

院系：物理学院

专业：物理

研究方向：理论物理

导师姓名：杨义峰研究员

二〇一四年五月

AdS/CFT对偶性在凝聚态物理中的应用

杨康 物理

导师姓名：杨义峰研究员

摘要

AdS/CFT对偶性是现在弦论发展出来的极为重要的成果。AdS/CFT对偶性将量子场论问题于引力问题等同起来，从而可以将量子场论中比较难以处理的强耦合问题转化为一个引力背景下的弱耦合问题，降低计算的复杂程度。在本文中，我们回顾了AdS/CFT对偶性对凝聚态理论发展的影响，介绍了在AdS/CFT计算中出现的非费米液体和边缘费米液体现象和目前的发展前景，并且计算了在渐近AdS-RN黑洞背景下的磁化率。结果表明，渐近AdS-RN黑洞系统与重费米子系统存在着深刻的相似性，AdS/CFT技术的进一步发展将对深入认识强关联问题提供了一种新的视角。

关键词： AdS/CFT，凝聚态理论，非费米液体，重费米子

The application of AdS/CFT duality in condensed matter physics

Yang Kang Physics

Directed by Researcher Yang Yifeng

Abstract

AdS/CFT duality is an innovative achievement of modern string theory. AdS/CFT duality shows we could map a strongly coupled quantum field problem to a weakly coupled gravitational problem, which may reduce the complexity of the problem. In this thesis, we review the influence AdS/CFT exerts on the development of condensed matter theory and introduce the emergence of non-Fermi liquids and marginal Fermi liquids in the calculations of AdS/CFT correspondence, which reveals the prospect of this field. In addition, we calculate the dynamic susceptibility via the AdS/CFT duality in the asymptotically AdS Reissner - Nordström black hole background, which shows there is profound similarity between the asymptotically AdS Reissner - Nordström black hole system and heavy fermion systems. Thus the application of AdS/CFT duality in condensed matter theory has provided a new point of view to solve the strongly correlated problems.

Keywords: AdS/CFT, condensed matter theory, non-Fermi liquids, heavy fermion-

s

目录

绪言

在凝聚态物理中，强关联现象一直以来都是研究的热门领域，铜氧化物超导，重费密子，铁基超导等物质由于其新奇的物理性质而备受关注。然而，虽然传统的量子场论方法处理玻色子系统和弱耦合极限时有比较好的解析和数值结果，但在费米子系统和强耦合情形下却遇到了很多困难。一方面，对于有限密度费米子来说，费米子符号问题使得数值路径积分方法复杂度呈指数式上升^[1]，无法像玻色子系统那样进行暴力求解。另一方面，铜氧化物超导^[2]，重费密子^[3]，铁基材料^[4]在某些条件下，展现出了异于传统的基于微扰论的费米液体的性质，它们具有完全不同的对频率和温度的依赖关系，被称为奇异金属^[5]。并且，在有限温度时，根据准粒子概念的量子场论自身对于解决量子临界现象存在着巨大的困难。因此，如何理解这些奇异金属的性质称为了一个极富意义与挑战性的问题。

在弦论中，AdS/CFT对偶性是研究强耦合规范理论的一个重要手段^[6]。在弦论中，猜想对于一个量子场论，它可以被认为等同于一个引力理论，量子场论中的一切求解可以归结于求解与之对应的引力问题。而在一般情形下，寻找相互对应的量子场论和引力理论是非常困难的事，但对于拥有高对称性的系统，这个对偶可以比较容易的找到。1997年，Juan Maldacena发表了具有里程碑意义的文章^[7]，第一次猜想了AdS时空的超引力问题等同于一个超对称共形场问题，随后，Polyakov, Witten^[8, 9]等人进一步论证了这个对偶性，并建立起了四维时空中的 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称杨-米尔斯规范场理论与 AdS_5 时空的对应。此后，其他的一些计算也表明，这个猜想在很大的可能性上是正确的，一些其他对应的模型也被建立了起来^[10, 11]。在这个对偶性中，场论中的强耦合情形被对应于引力的弱耦合情形，并且在规范场的 $N \rightarrow \infty$ 情形下，引力理论的曲率半径远大于弦的尺度，可以使用经典引力理论—广义相对论求解。于是，AdS/CFT对偶性提供了一种解决强耦合情形的途径。

对于凝聚态理论来说，目前最为迫切需要解决的就是之前所提到的强耦合场论和指数墙问题。对于一个处于量子临界点附近的凝聚态系统，由于量子涨落的关联长度趋于无穷大，此时，系统具有共形不变性，可以用共形场论加以描述^[1]，根据之前所述的AdS/CFT对偶性猜想，进一步可以用引力理论来描述处于量子相变附近的凝聚态系统。目前，超导体-绝缘体相变^[2,3,4]，冷原子中的Feshbach共振^[5,6]等现象均以用AdS/CFT对偶性进行研究过，而当把这一对偶性运用于费米子系统^[7]时，由于运动方程的经典性，将可以避免费米子符号问题，为解决有限费米子密度的强关联问题提供新的途径。

在这篇论文中，我们将在第一章中介绍AdS/CFT对偶性的理论基础，包括从圈图意义上的理解，M理论中的解释以及四维时空中的 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称杨-米尔斯规范场理论与 AdS_5 时空的耦合系数的对应。在第二章中，我们着重介绍了AdS/CFT对偶性在凝聚态理论中的运用成果和发展前景。在第三章中，我们计算了在渐近AdS-RN黑洞背景下的磁化率，并结合电导率的结果，与现有的描述重费米子的凝聚态理论相比较，认为AdS/CFT将为解释重费米子系统的量子临界性质提供有效的手段。

第一章 AdS/CFT对偶性理论基础

1.1 量子场论与高一维时空理论等价性的直观理解

量子场论是利用量子化的场来描述物理现象的一种方法，它在高能物理、凝聚态物理上有着极为重要的应用。量子场论不同于经典理论和量子力学，在它自身的框架之中，已经限定了量子场论可以应用的范围，对于超出某个能标范围的物理现象，量子场论预言了自身的崩溃—紫外发散，这个能标也被称作紫外截断。只有承认紫外截断的存在，才能保证量子场论的自洽性。对于不同的理论，这个截断有着不同的物理意义。对于凝聚态系统来说，由于研究的对象往往是一套格点点阵，一个自然的截断就是格点之间的间距。此时我们可以将量子场论写作如下的形式：

$$H = \sum_{x,i} J_i(x, a) \mathcal{O}^i(x) \quad (1.1)$$

其中 a 代表量子场论的紫外截断，而 x 代表场论所在的时空坐标， i 标记哈密顿量中的不同项， J_i 代表场论中的耦合系数， \mathcal{O}^i 为量子场论中的算符。当这个紫外截断的大小进行改变时，我们知道，依据Kadanoff-Wilson的重整化群理论，量子场论形式上的耦合系数将发生改变，并且可能会引入新的相互作用。这个过程可以用重整化群方程描述为^[7]：

$$a \frac{\partial}{\partial a} J_i(x, a) = \beta_i \left(J_i(x, a), a \right) \quad (1.2)$$

随着能标的改变，不同算符的耦合系数会进行“流动”，而系数 β 刻画了不同耦合系数随着能标改变的流动方向与快慢。于是对于每一个不同的 a ，都存在着一个一组系数 $J_i(x, a)$ 与之对应，也即一个形式上的量子场论。如果把量子场论自身所

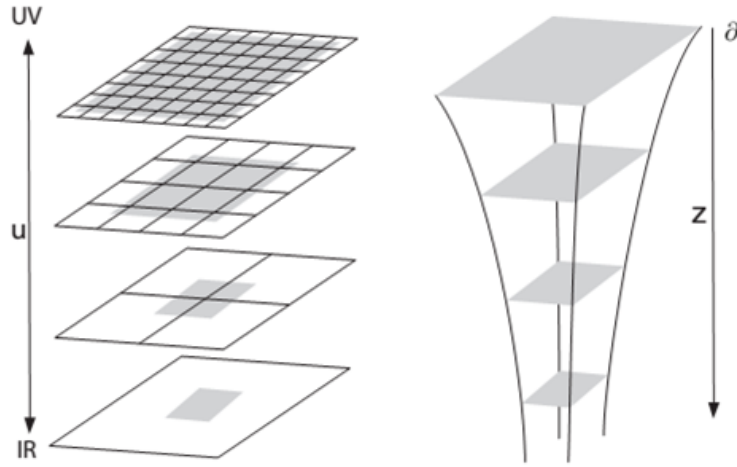


图 1.1: 量子场论与引力理论对应示意图

定义的空间视为一个超曲面，而把 a 的定义域视作径向方向，我们可以看到，由重整化群刻画的完整的量子场论可以看做是一个比它自身高一维时空中的理论。一个新的维度从量子场论自身之中衍生了出来。

从上面的讨论可以知道，耦合系数 $J_i(x, a)$ 可以看做为一个定义在 (x, a) 时空上的量，对于一个 d 维的量子场论， $J_i(x, a)$ 可以看做 $d + 1$ 维的一个场。对于AdS/CFT猜想，则将 $J_i(x, a)$ 看做 $d + 1$ 维引力时空中的一个场，而原来的 d 维量子场论看做引力时空的边界。这时， $J_i(x, a)$ 的性质可以完全利用 $d + 1$ 维的引力理论来加以描述，如图??所示¹。并且，在量子场论中，我们往往需要求解的是格林函数，它可通过如下形式的有效势对 $J_i(x, a)$ 求泛函倒数得到：

$$\langle e^{i \int J_i(x, a) \phi(x, a)} \rangle \quad (1.3)$$

于是，我们只需要在引力理论中求出如上形式的有效势，就可以得到格林函数，从而计算出物理量。

1.2 熵和费曼图水平上的对应

在一般的情形下，寻找一个量子场论和与之对应的引力理论是件十分困难的

¹ 本章图片选自[?]

任务，但是对于具有最大对称性的系统，这个问题可以大大的简化。在量子场论中，存在着的一类特殊的场，它们是重整化群的不动点，即对于所有的 i ，有 $\beta = 0$ 。此时由方程 (??) 可以看到，此时各个耦合系数随着能标的变化不会发生改变，系统具有共形不变性，

$$J_i(x, a) \equiv J_i(x, \lambda a) \quad (1.4)$$

这类量子场论被称为共形场。而与之对应，在引力理论中，存在着的一类特殊的时空，称为anti-de-Sitter时空，它的度规具有如下形式：

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \quad (1.5)$$

它具有负的常数Ricci标量，并且在如下标度变换下，这个度规保持形式不变：

$$(t, \vec{x}) \rightarrow \lambda(t, \vec{x}), \quad z \rightarrow \lambda z \quad (1.6)$$

因此，它也具有共形不变性^[7]。这两个理论之间的等价性就是AdS/CFT对偶性，它叙述了AdS时空中的引力理论与它边界上的共形场论的等价性，是目前为止最为成功的引力/规范场对偶性。

AdS/CFT对偶性的一个最初的理解可以从熵，即自由度开始。在引力理论中，关于黑洞热力学的一个十分重要的结果是Hawking和Bekenstein公式^[7]——黑洞的熵和它的面积成正比：

$$S = \frac{1}{4G_N} A \quad (1.7)$$

这个公式推广到任意维度的引力理论中，面积 A 应该理解为相应的视界面积。利用这个公式，我们可以先来计算AdS引力时空的熵。首先，我们取 \vec{x} 方向的时空的边长为 R ，由于在 $z = 0$ 处度规(??)处发散，取一个小的截断 $z = \epsilon$ ，我们得到AdS时空的视界面积为：

$$A = \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x \sqrt{-g} = \frac{L}{\epsilon} R^{d-1} \quad (1.8)$$

将 G_N 表述为普朗克长度 $G_N = (l_p)^{d-1}$ ，于是得到 $d = 1$ 维AdS时空的熵（自由度）

为:

$$S^{AdS} = \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\epsilon} \right)^{d-1} \left(\frac{L}{l_p} \right)^{d-1} \quad (1.9)$$

对于共形场系统, 我们取它为间距为 ϵ 的点阵, 并且也将它限制在边长为 R 的时空中, 令每个格点的自由度为 c_{CFT} , 那么它的熵(自由度)为:

$$S^{CFT} = \left(\frac{R}{\epsilon} \right) c_{CFT} \quad (1.10)$$

对比(??), 只要令

$$\frac{1}{4} \left(\frac{L}{l_p} \right)^{d-1} = c_{CFT} \quad (1.11)$$

两者的熵(自由度)就相等, 这说明将一个 d 维的量子场论等价于一个 $d+1$ 的引力理论是可行的。

进一步, 可以从费曼图的结构上来论证量子场论和引力理论的对偶性。对于引力理论, 弦论的基本设想是将广义相对论中运动的0维粒子推广为有限维的曲面, 类似于广义相对论中粒子的作用量, 我们可以研究一个1维的弦的作用量—Nambu-Goto作用量^[7], 它正比于弦所划出的世界面的面积, 可以表述为:

$$S_{NG} = -T \int \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}} d^2\sigma \quad (1.12)$$

其中 $G_{\alpha\beta}$ 是弦的世界面上的导出度规:

$$G_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad (1.13)$$

T 被称为弦的的张力, 引入Regge斜率 α' 和弦长尺度 l_s :

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad \frac{1}{2} l_s^2 = \alpha' \quad (1.14)$$

于是我们可以将弦的坐标 X^μ 进行量子化, 计算其振荡模式, 将相应的激发理解为粒子, 对于弦的无质量能谱, 可以证明其存在着自旋为2的粒子, 这被认为代表着引力的结构。引入弦之间的三点相互作用, 并将耦合系数记为 g_s 后, 可以进行如下的微扰展开计算, 可以证明, 这个展开是一个按照图的拓扑性质的展开, 可以

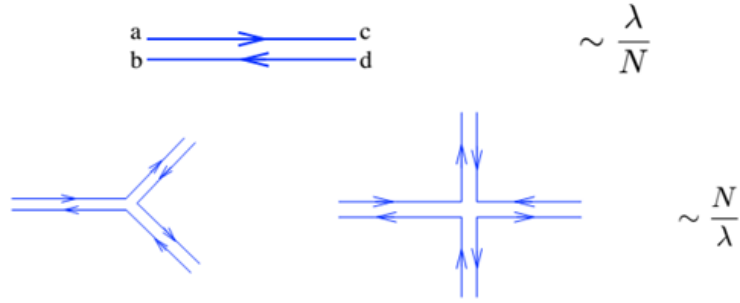


图 1.2: $U(N)$ 规范场费曼图结构

写作:

$$\mathcal{A} = \sum_{h=0}^{\infty} g_s^{2h-2} F_h \alpha' \tag{1.15}$$

\mathcal{A} 是需要计算的振幅, h 是图的亏格数。接下来, 我们将看到, 在规范场中, 费曼图也将出现这样的结构。

取规范场理论为 $U(N)$ 的Yang-Mills规范场论, 它的拉格朗日量为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \tag{1.16}$$

$F_{\mu\nu}$ 为非阿贝尔场的场强, g 为规范场的耦合常数, 取t'Hooft耦合常数为 $\lambda = g^2 N$, 于是可以将场论进行t'Hooft 展开^[7], 即令 λ 为常数按 N 的指数展开, 其费曼图将包含图??所示这几项。可以证明, N 的不同的指数项所对应的图具有不同的拓扑结构。假设 E 是图中传播子的个数, V 是相互作用顶点的个数, F 是图中所包含的圈的数目, 那么这个图的贡献为:

$$\left(\frac{\lambda}{N}\right)^E \left(\frac{N}{\lambda}\right)^F N^F = N^{F-E+V} \lambda^{E-V} \tag{1.17}$$

由拓扑学的知识可以知道, $F_E + V = \chi$ 正是图的欧拉特征标, 它与亏格数的联系为 $\chi = 2 - 2h$ 。于是在大 N 极限下, 我们可以得到有效势为:

$$\log Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} \sum_{l=0}^{\infty} c_{l,h} \lambda^l = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} f_h(\lambda) \tag{1.18}$$

对比(??)的结果, 可以看到只要认为 $g_s \sim \frac{1}{N}$, 弦论的微扰展开结果和规范场的费

曼图展开结果相同。从这个意义上讲，规范场的费曼图结果可以描述弦运动所划出的世界面。

1.3 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称Yang-Mills规范理论与 AdS_5 理论的对应

在这一部分，我们将详细的阐述 $\mathcal{N} = 4$ 的规范理论和 AdS_5 的引力理论的对应，这是最早由Maldacena猜想^[7]，并且到目前为止最为成熟的AdS/CFT对偶性的实例。

将一维的运动的弦的概念推广为 p 维的膜。那么对于开弦来说，它的端点必须有一个边界条件，对于狄利克雷边界条件的开弦来说，它的端点终止的坐标构成了一个 p 维曲面，这个曲面可以形成D p -膜。对于这些D p -膜来说，类似于0维的电子与1维的电磁矢势的耦合，由于规范场可以被定义为一个 $(p+1)$ 形式， p -膜可以与规范场进行耦合，作用量可以根据电子与电磁规范场的耦合形式推广为^[7]：

$$S_{int} = \mu_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_{p+1}} \quad (1.19)$$

μ_p 为膜的电荷。对于D p -膜来说，它的内部自由度可以通过规范场进行激发，这样它可以用Born-Infeld作用量描述为：

$$S_{BI} = T_{Dp} \int d^{p+1}x \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta} + 2\pi l_s^2 F_{\alpha\beta})} \quad (1.20)$$

T_{Dp} 为D p -膜的张力，用弦耦合常数和弦长表述为：

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}} \quad (1.21)$$

如果取膜所嵌入的空间为平直空间，那么膜上的导出度规可以表示为：

$$G_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + (2\pi l_s^2)^2 \partial_\alpha \phi^i \partial_\beta \phi^i \quad (1.22)$$

于是将膜的作用量展开到 F 和 ϕ 的二阶，可以得到：

$$S^{(2)} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi^i \partial^\alpha \phi^i + \dots \right) \quad (1.23)$$

g_{YM} 是Yang-Mills耦合系数，它可以用 l_s 和 g_s 表达为：

$$g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_s \quad (1.24)$$

可见，从Dp膜中，我们正好得到了一个规范场的作用量，在目前的情形下，规范场为 $U(1)$ 的阿贝尔规范场。可以证明，如果我们研究的对象不是一张膜，而是叠加在一起的 N 张膜，得到的 A 与 ϕ 将按照 $U(N)$ 规范群进行变换，规范场将为非阿贝尔规范场。对于D3-膜的情形，我们将得到一个包含6个标量场的 $SU(N)$ 规范场理论，它被认为是 $\mathcal{N} = 4$ 超对称Yang-Mills规范理论，这构成了AdS/CFT对偶性的基础。

现在，考虑弦论本身作为引力理论的意义。对于一个引力理论，它的领头项应该给出Einstein-Hilbert作用量：

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R + \dots \quad (1.25)$$

对于10维理论，依据维数分析，引力常数 G 与弦长和弦耦合系数的关系为：

$$16\pi G = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8 \quad (1.26)$$

取 N 个D3-膜叠加，那么依据对称性，度规应该可以写作这样的形式：

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}} \left(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) + H^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (1.27)$$

可以证明，这个度规的确是超引力作用量的解^[7]，而且可以证明 H 应该满足拉普拉斯方程，它的具体形式为：

$$H = 1 + \frac{L^4}{r^4} \quad (1.28)$$

常数 L 等于 $4\pi g_s N l_s^4$ ，在接近D3-膜的地方，有 $r \ll 1$ ，于是我们得到如下的度规形式：

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{L^2}{r^2}dr^2 + L^2 d\Omega_5^2 \quad (1.29)$$

于是这个度规的具有 $AdS_5 \times S_5$ 的形式，由于 S_5 是一个常数半径的球面，通常我们只需关注 AdS_5 的部分。这样我们看到，对于一个具有D3-膜的超引力理论，我们可以同时用 $SU(N)$ 规范场理论和 AdS_5 理论进行描述，于是这两个理论在这个意义上等价，具有对偶性。借助于前面的等式(??)(??)以及t'Hooft耦合常数和普朗克常数的定义，我们可以得到：

$$\frac{l_s^2}{L^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.30)$$

$$\left(\frac{l_p}{L}\right)^8 = \frac{\pi^4}{2N^2} \quad (1.31)$$

从这两个表达式可以看出，如果我们要让弦的有质量激发给出的修正很小，即 $l_s/L \ll 1$ ，那么这将对应于规范场的t'Hooft耦合常数很大，如果我们需要经典引力理论可以使用，则需要 $l_p/L \ll 1$ ，这对应于 $N \gg 1$ 。于是我们看到，在规范场满足：

$$N \gg 1, \quad \lambda \gg 1 \quad (1.32)$$

时，它可以通过经典的 AdS_5 引力理论加以描述。

1.4 两点格林函数的计算

在论文的这一部分，我们将详细的阐述利用AdS/CFT来计算两点格林函数的方法。根据前面的叙述，AdS/CFT猜想认为，AdS时空中的量和共形场论中的作用量以如下的方式等价^[7]：

$$\ln Z_{CFT} = \langle e^{i \int_{\partial M} \phi_0 \mathcal{O}} \rangle = e^{i S_{cl}[\phi]} \quad (1.33)$$

第二个等式中的指数是共形场的作用量，而第三个等式中的指数是AdS时空中的作用量，对于共形场来说， ϕ_0 是一个源，与算符 \mathcal{O} 耦合，而对于引力理论，

ϕ_0 是 $d + 1$ 维时空在 d 维边界上的边界条件， S_{cl} 可以利用经典理论解出，并且表达为边界条件 ϕ_0 的泛函。在量子场论中，对于格林函数，可以通过如下方式求得：

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0) \rangle = \frac{\delta^2 Z_{CFT}}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(0)} \Big|_{\phi_0=0} \quad (1.34)$$

由于(??)所示的等价性，我们可以将格林函数的计算转化为：

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0) \rangle = \frac{\delta^2 S_{cl}[\phi]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(0)} \Big|_{\phi_0=0} \quad (1.35)$$

然而这个等式往往遇到两个问题，第一个问题是AdS作用量的解在边界处往往呈发散的形式，另一个问题是 S_{cl} 不仅仅依赖于边界条件，还依赖于视界处场的行为，对于不同的格林函数，视界处有着不同的表现，下面将要来详细阐述这个问题。

首先，选取如下 AdS_{d+1} 的度规形式：

$$ds^2 = \frac{L^2}{Z^2} [dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu] \quad (1.36)$$

考虑一个在其中运动的标量场，它的作用量如下：

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} [g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + m^2 \phi^2] \quad (1.37)$$

为了求得经典引力理论中的作用量，我们需要在边界条件 $\phi(z=0) = \phi_0$ 下求解相应的场运动方程：

$$\partial_M (\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi) - \sqrt{-g} m^2 \phi = 0 \quad (1.38)$$

将场的横向分量作傅里叶展开 $\phi(z, x^\mu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \phi_k(z)$ ，可以在动量-频率空间将它写为：

$$z^{d+1} \partial_z (z^{1-d} \partial_z \phi_k) - k^2 z^2 \phi_k - m^2 L^2 \phi_k = 0 \quad (1.39)$$

对于 $z \sim 0$ 的区域，可以得到 ϕ_k 有两个渐近解：

$$\phi_k \approx A(k)z^{d-\Delta} + B(k)z^{-\Delta} \quad (1.40)$$

其中， Δ 由下式给出：

$$\Delta = \frac{d}{2} + \nu, \quad \nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} \quad (1.41)$$

于是当 $z \rightarrow 0$ 且 $d < \Delta$ 时，场方程的解呈发散趋势，为了使边界条件的理解有意义，我们必须对场进行重整化，最简单的方法是将发散因子去掉，以量

$$\varphi = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} \phi(z, x) \quad (1.42)$$

代替原来的边界场 ϕ_0 ，将对 ϕ_0 的泛函倒数改为对 φ 的泛函倒数。将 φ 带入到边界形式($z = \epsilon$) (??)中，我们看到：

$$S \sim L^d \int d^d x \varphi(x) \epsilon^{-\Delta} \mathcal{O}(\epsilon, x) \quad (1.43)$$

为了让这个作用量有意义，那么算符 \mathcal{O} 必须被重新理解为：

$$\mathcal{O} = \epsilon^{-\Delta} \mathcal{O}(\epsilon, x) \quad (1.44)$$

于是，由于 z 可以被理解为能量的倒数标度（它在共形变换(??)下按能标的倒数变换），所以 $-\Delta$ 可以被理解为算符的共形维度^[?]]。这样我们就解决了第一个问题—AdS理论中的重整化。

对于第二个问题，一般来讲，AdS/CFT计算需要在AdS时空中引入合适的扰动，让时空变成渐近AdS形式的，这个扰动往往需要引入一个黑洞。于是由微分方程的性质可以知道，除了在外边界处的边界条件外，我们还必须知道位于视界处的边界条件才能得到唯一的答案。对于欧几里德符号的AdS/CFT对偶性来说，由量子场论的知识我们知道，它沿时间方向的积分收敛，因而其格林函数只有一

组，即Matsubara格林函数：

$$G^E = -i \int d^4x_E e^{-ik_E x_E} \langle \mathcal{T} \mathcal{O}(x_E) \mathcal{O}(0) \rangle \quad (1.45)$$

这对应于在引力理论中，其视界处的边界条件有一个自然的选择—解在视界处不发散。然而对于闵可夫斯基符号来说，为了保证积分的收敛性，量子场论里往往需要把时间 t 变为 $t + i\epsilon$ ，对不同的 ϵ 的选择，对应了不同的格林函数，常用的有推迟格林函数，超前格林函数和费曼格林函数，它们的定义如下：

$$G^R = -i \int d^4x e^{-ikx} \theta(t) \langle [\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(0)] \rangle \quad (1.46)$$

$$G^A = i \int d^4x e^{-ikx} \theta(-t) \langle [\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(0)] \rangle \quad (1.47)$$

$$G^F = -i \int d^4x e^{-ikx} \langle \mathcal{T} \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle \quad (1.48)$$

这反映到AdS/CFT对偶中，就是在视界处，任意的选择都可以使得微分方程的解有限，而不同边界条件的选择，会得到不同的格林函数结果。

对于闵可夫斯基符号的时空来说，为了得到它的格林函数，一个办法是使用虚时间计算相应的欧几里德符号时空中的格林函数，在根据场论中的解析延拓^[7]的方法，来得到相应的闵可夫斯基符号时空的格林函数，但由于解析延拓必须知道相应的欧几里德度规符号中所有频率的格林函数，而微分方程又往往只在 ω 极大或者极小的情况下可以求解^[7]，这个方法并不是经常可行。因此如何处理闵可夫斯基度规符号的边界条件是AdS/CFT猜想提出以来十分微妙的一个问题^{[7][??]}。

对于这个问题，一个解决方法就是选择可以利用欧几里德符号度规完全解出的时空，将引力理论中的格林函数先用解析延拓的方法解出，然后再在闵可夫斯基符号下选取不同的世界处边界条件，看能否得到相同的结果。实际证明，如果按照如下的方法^[7]，将能够得到所需的格林函数。

以标量场为例，取一般的度规形式：

$$ds^2 = g_{zz}(z) dz^2 + g_{\mu\nu}(z) dx^\mu dx^\nu \quad (1.49)$$

作用量写为:

$$S = K \int d^d x \int_{z_B}^{z_H} dz \sqrt{-g} [g^{zz} (\partial_z \phi)^2 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2] \quad (1.50)$$

那么通过对 ϕ 取变分, 我们得到方程:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial(\sqrt{-g} g^{zz} \partial_z \phi) + g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0 \quad (1.51)$$

为了让这个解满足边界条件 $\phi(0, x) = \phi_0$, 我们将其做傅里叶展开, 并按照下式定义 f_k :

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} f_k(z) \phi_0(k) \quad (1.52)$$

这样, 在边界处 f_k 的边界条件变为 $f_k(z_B) = 1$ 。同时, 根据D. T. Son和A. O. Starinets的猜想^[7], 对于推迟格林函数, f_k 在视界处的边界条件应该为入射波条件, 即波的流动应该是进入视界, 而对于超前格林函数, 其视界处的边界条件应该是出射波条件。这样, 利用运动方程(??), 我们可以将作用量表达为边界条件的泛函:

$$S = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_0(-k) \mathcal{F}(k, z) \phi_0(k) \Big|_{z=z_B}^{z=z_H} \quad (1.53)$$

其中 $\mathcal{F}(k, z)$ 为:

$$\mathcal{F}(k, z) = K \sqrt{-g} g^{zz} f_{-k}(z) \partial_z f_k(z) \quad (1.54)$$

根据这个等式, 可以立即得到格林函数应该为:

$$G(k) = -\mathcal{F}(k, z) \Big|_{z=z_B}^{z=z_H} - \mathcal{F}(-k, z) \Big|_{z=z_B}^{z=z_H} \quad (1.55)$$

进一步, D. T. Son和A. O. Starinets猜想求解格林函数时, 视界处的贡献可以直接舍弃, 这样格林函数简化为:

$$G(k) = -2\mathcal{F}(k, z) \Big|_{z=z_B} \quad (1.56)$$

这个表达式, 可以进行验证, 在BTZ黑洞下。给出的结果等于利用解析延拓给出的结果^[7], 并在^[7]中进一步论证了它的正确性。由于(??)比较复杂, 在这里我们

给出一个简单的形式，它将在第二章和第三章的计算中被使用。

一般来讲，对于引力理论再说，在将运动方程的解 ϕ （这里的 ϕ 可以是不同自旋的场，不仅限于标量场）代入作用量，并给定边界条件后，作用量将呈如下形式：

$$S = \int_{z=z_B} \left\{ \phi \partial_z \phi + \text{常数} \times \phi^2 \right\} \quad (1.57)$$

对于第二项，对 ϕ_0 求二次导数之后，得到的是一个常数，这项被称作接触项，可以通过重新定义格林函数来去掉。对于第一项来说，往往需要通过前面的所提到过的重整化步骤，并去除一个接触项，来得到格林函数。将渐近形式 $\phi_k = A(k)z^{\Delta_-} + B(k)z^{\Delta_+} + \dots$ 代入，并将其归一化为 $\phi_k = \phi_{0k} f_k(z)$ ，其中 $f_k(z) = \phi_k(z)/\phi_k(\epsilon)$ ，则作用量变为：

$$S = \int_{z=z_B} \left\{ \Delta_- \epsilon^{-1} |\phi_{0k}|^2 + (\Delta_+ - \Delta_-) \epsilon^{\Delta_+ - \Delta_- - 1} \frac{B(k)}{A(k)} |\phi_{0k}|^2 + \dots \right\} \quad (1.58)$$

第一项为一个接触项，直接去掉，第二项通过重整化后，可以得到我们所需要的格林函数。最后，我们得到这样的格林函数表达式：

$$G(k) \sim \frac{B(k)}{A(k)} \quad (1.59)$$

这将是第二部分和第三部分用来求解格林函数的基础。

第二章 AdS/CFT对偶性在凝聚态物理中的应用

2.1 粒子/涡线对偶性与电磁自对偶性

1

2.1.1 粒子/涡线对偶性

凝聚态系统中，物质的有两种不同性质的激发。第一种是粒子型激发，它的基本元素是类似于单个电子或分子的粒子，能谱通过粒子本身的动能激发或者相互作用加以描述。这样的描述可以见于绝缘体，导体中，例如电子的能带性质决定了物质的导电性质^[?]]，也可以见于自旋系统中，电子之间的自旋耦合和交换作用决定了物质的长程关联性。另一种激发类型是涡线性激发，涡线是一根假想的曲线，围绕着涡线存在着一个角动量分布。这种类型的激发可以存在于超流体中^[?]]，代表超流成分的转动，也可以存在于自旋系统中，来描述自旋的整体转动^[?]]。同粒子一样，涡线也具有一定的能量，一次它也会改变物质的能谱性质。在很多系统中，它在不同的相中激发的主要性质可以分别通过涡线和粒子型的能谱来加以描述，系统存在着粒子/涡线对偶性，而在量子临界点，涡线和粒子型的激发将相互等价，系统存在着一个粒子/涡线的自对偶性。

为了描述这样一个系统，我们选择一个具有阿贝尔规范场的平面 CP_1 模型^[?]]模型。这个模型中具有两个复标量场 z_1 和 z_2 以及一个 $U(1)$ 阿贝尔规范场 A_μ ，

¹ 本部分内容主要参照^[?]]

它的作用量形式如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int dx^2 dt \left[|(\partial_\mu - iA_\mu)z_1|^2 + |(\partial_\mu - iA_\mu)z_2|^2 + s(|z_1|^2 + |z_2|^2) \right. \\ & \left. + u(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 + v|z_1|^2|z_2|^2 + \frac{1}{2e^2}(\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

前两项为动力学项，考虑了复标量场的规范不变性，第二项、第三项和第四项是 ϕ^4 模型的形式，其中 $u > 0$ 并且 $-4u < v < 0$ ，而最后一项是规范场的动力学项。对于负值的 v 当 s 足够小的时候，将有 $|z_1| = |z_2| \neq 0$ ，这时可以定义一个序参量 $\vec{N} = z^* \vec{\sigma}$ ，通过调节参数 s ，这个系统可以达到一个量子相变点。其中一相 $\langle \vec{N} \rangle = 0$ 为库仑相，另一相 $\langle \vec{N} \rangle \neq 0$ ，为Higgs相。库仑相中，原本的粒子场 $z_{1,2}$ 的描述将占据主要的激发形式，而Higgs相中，涡线的描述将表达系统主要的激发性质。

为了描述系统所拥有的粒子/涡线对偶性，来计算守恒流的响应函数（延时格林函数）。假设系统具有守恒流 J_μ^a ， a 代表不同类型的守恒流，而 μ 是时空的指标。那么，对于一个零温并且处于量子临界点的系统，它的场具有洛伦兹不变性和标度不变性，结合流守恒条件，我们可以得到守恒流的响应函数必须为如下形式：

$$C_{\mu\nu}^{ab}(p)|_{T=0} = \sqrt{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) K_{ab} \quad (2.2)$$

K_{ab} 为常数，它只和场论以及守恒流自身的性质有关。对于非零温的情形，取 $2+1$ 的共形场形式。上式需要推广为：

$$C_{\mu\nu}^{ab}(\omega, k) = \sqrt{p^2} (P_{\mu\nu}^T K_{ab}^T(\omega, k) + P_{\mu\nu}^L K_{ab}^L(\omega, k)) \quad (2.3)$$

$P_{\mu\nu}^T$ 和 $P_{\mu\nu}^L$ 为两个正交的投影算符，分别代表纵向和横向分量（相对于 k ）。对于 \mathbb{CP}_1 模型来说，它具有两个连续的对称性，一个是局域的 $U(1)$ 规范对称性：

$$z_1 \rightarrow z_1 e^{i\phi}, \quad z_2 \rightarrow z_2 e^{i\phi}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi \quad (2.4)$$

另一个是整体的 $U(1)$ 对称型:

$$z_1 \rightarrow z_1 e^{i\varphi}, \quad z_2 \rightarrow z_2 e^{-i\varphi} \quad (2.5)$$

根据Noether定理^[7], 我们可以写出这两个连续对称性所对应的守恒流:

$$J_{1\mu} = i(z_1^*(\partial_\mu - iA_\mu)z_1 - z_1(\partial_\mu + iA_\mu)z_1^*) + i(z_2^*(\partial_\mu - iA_\mu)z_2 - z_2(\partial_\mu + iA_\mu)z_2^*) \quad (2.6)$$

以及:

$$J_{2\mu} = i(z_1^*\partial_\mu z_1 - z_1\partial_\mu z_1^*) - i(z_2^*\partial_\mu z_2 - z_2\partial_\mu z_2^*) \quad (2.7)$$

此外这个系统还具有一个交换 z_1 和 z_2 的 Z_2 的分立对称性, 并且上述的两个守恒流在这个对称性下分别进行偶和奇变换。于是对于(??)的定义, K 将对角化并且 $K_1 1 = K_1$, $K_2 2 = K_2$ 。为了计算守恒流的相应函数, 可以将 S 展开到 A_μ 的二阶相, 并写出与之对应的Coleman-Weiberg有效势:

$$W = \frac{1}{2} \int_{k,\omega} \left\{ - (k_i A_0 + \omega A_i)^2 \left[\frac{1}{e^2} + \frac{\Pi^L(k, \omega)}{-\omega^2 + k^2} \right] + A_i A_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left[\frac{k^2}{e^2} + \Pi^T(k, \omega) + \frac{\Pi^L(k, \omega)\omega^2}{-\omega^2 + k^2} \right] \right\} + \dots \quad (2.8)$$

$\Pi^{L,T}$ 是光子两个分量的自能, 它们与之前守恒流定义的关系为 $\Pi^{L,T} = \sqrt{p^2} K_1^{L,T}$ 。在量子临界点, 由于 $\dim[\Pi] = 1$, 因此, 光子的作用中与标量场极化的贡献远大于自身Maxwell项的贡献。我们可以直接省去它Maxwell项。令 $e \rightarrow \infty$, 于是利用上面的有效势, 最后得到守恒流相应函数为:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{ij} k_i A_j; \epsilon_{i'j'} k_{i'} A_{j'} \rangle &= \frac{k^2}{\Pi^T(k, \omega)}, \quad \langle \epsilon_{i'j'} j_{i'} A_{j'}; (k_i A_0 + \omega A_i) \rangle = \epsilon_{i'i} \frac{\omega k_{i'}}{\Pi^T(k, \omega)} \\ \langle (k_i A_0 + \omega A_i); (k_j A_0 + \omega A_j) \rangle &= \left(\delta_{ij} - \frac{k_i j_j}{k^2} \right) \frac{\omega^2}{\Pi^T(k, \omega)} - \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{(-\omega^2 + k^2)}{\Pi^L(k, \omega)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

现在来建立 CP_1 模型的对偶表述, 将涡线作为作用量中显式出现的量。考虑在Higgs相中的涡线激发, 它们可以由一对回转数 (n_1, n_2) 加以描述, 分别刻画了 z_1 和 z_2 在无穷远处的相位变化。可以证明, 它们的能量呈对数发散, 并且发散

项的系数为:

$$\left(2\pi n_1 - \int d^2x \epsilon_{ij} \partial_i A_j\right)^2 + \left(2\pi n_2 - \int d^2x \epsilon_{ij} \partial_i A_j\right)^2 \quad (2.10)$$

当 A_μ 的流满足下列量子化条件^[? ? ?]时, 这个系数将最小:

$$\int d^2x \epsilon_{ij} \partial_i A_j = \pi(n_1 + n_2) \quad (2.11)$$

现在我们将量子数(1, 0)的涡线等价于粒子 w_1 的世界线, 而将量子数(0, 1)的涡线等价于粒子 w_2 的世界线, 那么可以从上式得到关系:

$$\frac{1}{\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu A^\lambda = i(w_1^* - \partial_\mu w_1 - w_1 \partial_\mu w_1^*) + i(w_2^* - \partial_\mu w_2 - w_2 \partial_\mu w_2^*) \quad (2.12)$$

为了从得到对偶理论的作用量, 注意到涡线之间存在着相互作用, 这可以从(??)的经典解中看到, z_1 和 z_2 的流将导致 w_1 和 w_2 之间存在着吸引作用, 将这个吸引作用认为是由一个对偶的规范场 \tilde{A}_μ 引起, 那么可以通过对称性分析和之前所述的限制条件得到对偶理论的有效作用量如下:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} = \int dx^2 dt & \left[|(\partial_\mu - i\tilde{A}_\mu)w_1|^2 + |(\partial_\mu + i\tilde{A}_\mu)w_2|^2 + \tilde{s}(|w_1|^2 + |w_2|^2) \right. \\ & \left. + \tilde{u}(|w_1|^2 + |w_2|^2)^2 + \tilde{v}|w_1|^2|w_2|^2 + \frac{1}{2\tilde{e}^2}(\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \tilde{A}_\lambda)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

注意到, 在对偶理论中, w_1 和 w_2 带有相反的规范场荷, 并且其作用量的形式与(??)十分相似, 可以同样定义守恒流响应函数的 $\tilde{K}_{1,2}^{L,T}$ 。其守恒流的具体形式为:

$$\tilde{J}_{1\mu} = i(w_1^*(\partial_\mu - i\tilde{A}_\mu)w_1 - w_1(\partial_\mu + i\tilde{A}_\mu)w_1^*) - i(w_2^*(\partial_\mu + i\tilde{A}_\mu)w_2 - w_2(\partial_\mu - i\tilde{A}_\mu)w_2^*) \quad (2.14)$$

和

$$\tilde{J}_{2\mu} = i(w_1^* \partial_\mu w_1 - w_1 \partial_\mu w_1^*) + i(w_2^* \partial_\mu w_2 - w_2 \partial_\mu w_2^*) \quad (2.15)$$

进一步, 由于 \mathbb{CP}_1 模型和它的对偶模型形式上的相似性, 我们还可以用对偶映射将(??)映射回(??), 并得到一个和(??)类似的表达式, 于是我们有这样的守恒流

关系:

$$\frac{1}{\pi}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu A^\lambda = \tilde{J}_{2\mu} \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\pi}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu \tilde{A}^\lambda = J_{2\mu} \quad (2.17)$$

将这两个关系以及之前得到的(??)结合起来, 可以得到下列的粒子/涡线对偶性关系式:

$$K_1^T(\omega, k)\tilde{K}_2^L(\omega, k) = \frac{1}{\pi} \quad \tilde{K}_1^T(\omega, k)K_2^L(\omega, k) = \frac{1}{\pi} \quad (2.18)$$

$$K_1^L(\omega, k)\tilde{K}_2^T(\omega, k) = \frac{1}{\pi} \quad \tilde{K}_1^L(\omega, k)K_2^T(\omega, k) = \frac{1}{\pi} \quad (2.19)$$

当系统处于量子临界点的时候, 由于粒子的激发和涡线的激发都将是能谱的主要贡献, 此时, $(CP)_1$ 模型和它的对偶模型应该等价, 这时有 $K_{1,2}^{T,L} = \tilde{K}_{1,2}^{T,L}$, 于是上面的等式中波浪号可以去掉, 变为如下的自对偶关系:

$$K_1^T(\omega, k)K_2^L(\omega, k) = \frac{1}{\pi} \quad K_1^L(\omega, k)K_2^T(\omega, k) = \frac{1}{\pi} \quad (2.20)$$

2.1.2 AdS时空的电磁对偶性

现在我们来考虑一个AdS时空中的引力理论, 并利用AdS/CFT对偶性来计算相应的守恒流响应函数, 论证其对偶性。我们选取度规形式如下:

$$ds^2 = \frac{r_0^4}{R^4 u^2}[-f(u)dt^2 + dx^2 + dy^2] + \frac{R^2}{4u^2 f} du^2 \quad (2.21)$$

其中 $f(u) = 1 - u^3$, 可以看到边界对应于 $u = 0$, 而视界对应于 $u = 1$, 并且这个理论的温度为^[? ?]:

$$T = \frac{3}{2\pi} \frac{r_0^3}{R^3} \quad (2.22)$$

对于这个理论的规范场部分, 它的作用量为:

$$S = -\frac{1}{4g_{4D}^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{MA} g^{NB} F_{MN} F_{AB} \quad (2.23)$$

现在类似前一节所述，来构建这个理论的守恒流，这里先研究的是和规范场的规范对称性有关的守恒流。关联函数仍然选取如下的形式

$$C_{\mu\nu}(\omega, k) = \sqrt{p^2}(P_{\mu\nu}^T K_{ab}^T(\omega, k) + P_{\mu\nu}^L K_{ab}^L(\omega, k)) \quad (2.24)$$

并且令傅里叶展开的矢量 \vec{k} 沿 x 方向，于是得到守恒流的分量形式如下：

$$C_{yy} = \Pi^T(\omega, k) \quad (2.25)$$

$$C_{tt} = \frac{k^2}{\omega^2 - k^2} \Pi^L(\omega, k) \quad (2.26)$$

$$C_{tx} = C_{xt} = \frac{-\omega k}{\omega^2 - k^2} \Pi(\omega, k) \quad (2.27)$$

$$C_{xx} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2} \Pi^L(\omega, k) \quad (2.28)$$

为了求解响应函数，按第一章所述，我们需要在边界条件 $\lim_{u \rightarrow 0} A_\mu(\omega, k) = A^0$ 下求解运动方程：

$$\partial_M(\sqrt{-g}g^{MA}g^{NB}F_{AB}) = 0 \quad (2.29)$$

并在 $u = 1$ 取出射波边界条件（此时视界在外部）。可以得到，方程的解形式为：

$$A_\mu(u, p) = M_\mu{}^\nu(u, p)A_\nu^0(p) \quad (2.30)$$

根据AdS/CFT对应原理，可以得到守恒流响应函数为^[7]：

$$C_{\mu\nu}(p) = -\chi \lim_{u \rightarrow 0} M'_{\mu\nu}(u, p) \quad (2.31)$$

χ 是作用量写为如下形式后的积分前的系数：

$$S = \frac{\chi}{2} \int du d^3x (A_t'^2 - f A_x'^2 - f A_y'^2 + \dots) \quad (2.32)$$

在这里的情形下 $\chi = 4\pi T/3g_{4D}^3$ 。现在选取径向规范 $A_u = 0$ ，把变量无量纲化 $w = 3\omega/(4\pi T)$ ， $3k/(4\pi T)$ ，并将运动方程写为分量形式，得到：

$$wA'_t + qfA'_x = 0 \quad (2.33)$$

$$A''_t - \frac{1}{f}(wqA_x + q^2A_t) = 0 \quad (2.34)$$

$$A''_t + \frac{f'}{f}A'_x + \frac{1}{f^2}(wqA_t + w^2A_x) = 0 \quad (2.35)$$

$$A''_y + \frac{f'}{f}A'_y + \frac{1}{f^2}(w^2 - q^2f)A_y = 0 \quad (2.36)$$

首先，考虑横向分量 A_y ，可以从方程(??)得到，它有两个渐近解：

$$Z_1(u) = 1 + hZ_2(u) \ln u + b_1^{(1)}u + \dots \quad (2.37)$$

$$Z_2(u) = u(1 + b_2^{(1)}(u) + b_2^{(2)}u^2 + \dots) \quad (2.38)$$

于是 A_y 可以写为：

$$A_y(u) = \mathcal{A}Z_1(u) + \mathcal{B}Z_2(u) \quad (2.39)$$

这样可以立即得到（类似1.4节的叙述） $C_{yy}(w, q)$ 为：

$$C_{yy}(w, q) = -\chi \frac{\mathcal{B}(w, q)}{\mathcal{A}(w, q)} \quad (2.40)$$

对于响应函数的纵向分量，根据式(??)，(??)可以知道， $A'_t(u)$ 可以写为 $A'_t(u) = cA_y(u)$ 的形式，于是我们可以立刻得到：

$$A'_t(u) = \left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}Z_1(u) + Z_2(u) \right] (wqA_x^0 + q^2wA_t^0) \quad (2.41)$$

而 $A'_x(u)$ 可以写成：

$$A'_x(u) = -\frac{1}{f} \left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}Z_1(u) + Z_2(u) \right] (w^2A_x^0 + wqA_t^0) \quad (2.42)$$

于是纵向的守恒流响应函数为：

$$C_{tt}(w, q) = \chi q^2 \frac{\mathcal{A}(w, q)}{\mathcal{B}(w, q)} \quad (2.43)$$

$$C_{xx}(w, q) = \chi w^2 \frac{\mathcal{A}(w, q)}{\mathcal{B}(w, q)} \quad (2.44)$$

可以看到利用这些表达式，守恒流响应函数存在着如下的关系：

$$\Pi^T(w, q)\Pi^L(w, q) = -\chi^2(w^2 - q^2) \quad (2.45)$$

考察引力理论中存在的电磁自对偶性。注意到可以将运动方程中的变量选为场强 F_{MN} ，而不是矢势 A ，于是运动方程写作：

$$\partial_M(\sqrt{-g}F^{MN}) = 0 \quad (2.46)$$

$$\partial_M(\sqrt{-g}\frac{1}{2}\varepsilon^{MNAB}F_{AB}) = 0 \quad (2.47)$$

做Hodge dual变换 $F^{MN} = \frac{1}{2}\varepsilon^{MNAB}G_{AB}$ ， ε^{MNAB} 为完全反对称张量， $\varepsilon^{0123} = 1/\sqrt{-g}$ 。这样利用 G ，运动方程化为：

$$\partial_M(\sqrt{-g}\frac{1}{2}\varepsilon^{MNAB}G_{AB}) = 0 \quad (2.48)$$

$$\partial_M(\sqrt{-g}G^{MN}) = 0 \quad (2.49)$$

定义 $G_{MN} = \partial_M B_n - \partial_N B_M$ ，就可以得到完全的自对偶描述。经过计算，可以发现，在对偶描述中的守恒流和原来的守恒流满足关系：

$$\Pi^T(w, q)\tilde{\Pi}^L(w, q) = -\chi(w^2 - q^2) \quad (2.50)$$

$$\tilde{\Pi}^T(w, q)\Pi^L(w, q) = -\chi(w^2 - q^2) \quad (2.51)$$

这正是关系式(??)成立的更深层次原因。于是，我们将它写为和上一节更为相似的形式，有：

$$K^L(\omega, k)K^T(\omega, k) = \text{常数} \quad (2.52)$$

可见AdS时空中的电磁自对偶性与凝聚态物理中的粒子/涡线对偶性存在着极大的相似性，并且这个对偶性是2 + 1维场论特有的性质，对任何 ω 和 k 都成立。这为尝试用AdS/CFT方法研究粒子型激发和涡线型激发引起的量子相变提供了重要线索。

2.2 全息（非）费米液体模型

2.2.1 （非）费米液体行为在AdS时空中的出现

在前面的一节中，我们已经看到，AdS/CFT对偶性在描述玻色子系统方面有着一定的预言性。而在凝聚态物理中，有限密度的费米子问题不仅难度更大，而且有着更加丰富的性质，如何解决费米子系统的强关联问题一直是个极为热门的领域。这一部分中，我们将介绍AdS/CFT对偶性在（非）费米液体方面的进展。

朗道的费米液体理论一直以来是强关联领域用来处理费米子系统的重要方法和基础。费米液体理论主要基于如下猜想：尽管粒子之间的相互作用远大于单粒子能级距离，但是在增加相互作用强度的过程中，粒子间的相互作用不会改变能级的分类，并且系统的激发仍然可以看做是一定数量的粒子产生的，它们被称为准粒子，在数量上等于原来的粒子数，但可能携带着不一样的物理参数，并且在统计上，它们在不同能级上的分布服从费米-狄拉克统计。利用准粒子的概念，许多凝聚态问题可以用简单的模型加以描述。

对于一个费米液体来说，在无相互作用的时候，它的性质类似于费米气体，此时可以将它的零温两点格林函数写作：

$$G^0(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k + \mu + i0^+ \cdot \text{sign}(k - k_f)} \quad (2.53)$$

μ 为化学势， ϵ_k 为气体自由粒子能级，对于低能的激发，上式又可以化为：

$$G^0(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\omega - \vec{v}_f(\vec{k} - \vec{k}_f) + i0^+ \cdot \text{sign}(\omega)} \quad (2.54)$$

其中 k_F 为费米动量，满足 $\mu = \epsilon_{k_F}$ ， \vec{v}_F 为费米速度，是 ϵ 对动量的一阶导数。当粒子之间相互作用逐渐增强时，系统的能谱仍然可以由粒子的激发加以刻画，这时

可以认为它的零温两点格林函数修正为:

$$G(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k + \mu' + \Sigma_k + i0^+ \cdot \text{sign}(p - p_f)} \quad (2.55)$$

并且依然可以定义费米动量为 $\epsilon_{k_F} - \mu' + \Sigma_{k_F} = 0$, Σ_k 为自能函数。于是它的低能激发依旧可以写作(??)的形式, 但其中的参量需要进行重新定义(见下面表达式):

$$G(\omega, \vec{k}) = \frac{Z}{\omega - \vec{v}_f \cdot (\vec{k} - \vec{k}_f) + i0^+ \cdot \text{sign}(\omega)} \quad (2.56)$$

Z 是格林函数在费米动量处的留数, 它标志着准粒子概念的适用性, 费米液体理论的成立必须要求 $Z \neq 0$

Čubrović发表在《Science》上的文章^[2]是最早利用AdS/CFT对偶性实现(非)费米液体行为的工作。在他们的文章中, 考虑了一个带电的AdS₄黑洞背景, 在其中加入费米子场, 利用数值的方法来计算费米子延时格林函数的虚部—即谱函数, 来观察是否出现费米液体行为, 他们的结果表明, 利用全息方法(AdS/CFT由于是将低一维的场论对应于引力理论, 类似于光学中的全息成像技术, 因此也被称为全息对偶)的得到的谱函数有着与费米液体相似的行为。

他们的时空度规以及与之对应的常数规范场如下列形式(即(??), 那里我们没写出必须同时存在的常数U(1)规范场):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{L^2 \alpha^2}{z^2} (-f(t) dt^2 + dx^2 + dy^2) + \frac{L^2}{z^2} \frac{dz^2}{f(z)} \\ A_0 &= 2q\alpha(z-1) \\ f(z) &= (1-z)(z^2 + z + 1 - q^2 z^3) \end{aligned} \quad (2.57)$$

值得一提的是, 常数的时间分量的U(1)规范场由于所对应的守恒流具有电荷密度的特点, 它的边界值也常常被称作化学势 μ 。作用量为:

$$S = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{6}{L^2} + L^2 \left(\frac{1}{4} F^2 - \bar{\Psi} e_A^M \Gamma^A D_M \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \right) \right] \quad (2.58)$$

e_A^M 是局域标架， Γ 是狄拉克矩阵， $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger i\Gamma^0$ 。式中协变导数的具体形式如下：

$$D_M \Psi = \left(\partial_M + \frac{1}{4} \omega_M^{AB} \Gamma_{AB} - iqA_M \right) \Psi \quad (2.59)$$

$\Gamma_{AB} = \frac{1}{2}[\Gamma_A, \Gamma_B]$ ， ω_M^{AB} 为自旋联络，它的计算方法可以参见[?]。注意到，对于费米子来说，由于拉氏量只含它的一阶导数，直接把狄拉克方程的解代回到作用量中会得到零的结果，所以为了让AdS/CFT方法能得到有意义的结果，必须在作用量中额外引入边界项[?]，并且在求泛函倒数的时候只对一般的旋量分量进行（另一半的旋量分量并不独立）。可以证明引入下列形式的边界项将给出最为正确的结果[?]：

$$S_{boundary} = \frac{L^2}{2k_4^2} \int_{z=z_0} d^3x \sqrt{-h} \bar{\Psi}_+ \Psi_- \quad (2.60)$$

Ψ_+ 和 Ψ_- 分别为旋量中 Γ_z 本征值为1和-1的投影部分， $h_{\mu\nu}$ 为边界处的导出度规。可以证明，这个边界项也将导出1.4节所说的求解延时格林函数的方法。

对于费米液体来说，一个显著的特征是对于确定的动量，推迟格林函数的虚部相对于 ω 的改变会出现一个显著的峰，并且改变动量的大小时，这个峰会移动。在Čubrović的文章中，数值结果显示，通过改变 μ/T 的比值，谱函数的确会从具有共形场的特性形式转变为出现一个关于 ω 的尖锐的峰值，并且峰值位置随动量变化，这可以视作从量子临界点到费米液体的转变。而对于费米液体，在费米能附近，粒子能谱将会有有一个线性色散的行为，且低温时准粒子的寿命宽度按温度的二次方变化，这也在[?]中得到验证。在全息费米液体模型中，改变费米子算符的质量（即改变费米子算符的共形维度），发现费米动量大小不变，这也与费米液体的假设—准粒子数量与原本存在的电子数量相同，因而不会随相互作用强度而改变相符。但是，全息费米液体与传统费米液体理论仍然存在着差异，传统费米液体的费米动量应该由格林函数在 ω 等于0处求得，但全息费米液体的峰只能在 $\omega \neq 0$ 处出现，这仍需要进一步的研究。

Čubrović的文章之后，研究带电的AdS黑洞背景下费米子行为成为了一个热门的领域。随后，Hong Liu等人采用解析的方法研究了渐近AdS的RN黑洞背景[?]，得到了一个与传统的朗道费米液体理论不同的结果，但由于这个方法求解的是频率很低的情形，因此并不与前述的费米液体行为矛盾[?]。

Hong Liu等人采取的是将RN黑洞划分为内外区域的方法，注意到在RN黑洞附近，几何将呈一个 AdS_2 的行为，从而在小动量的情况下求解。由于我们的工作采用的是这种方法，所以具体的计算步骤将在第三章叙述，这里仅叙述非费米液体的结果。首先，费米子格林函数在零温下按 ω 展开的形式结果为：

$$G_R(\omega, k) = K \frac{b_+^{(0)} + \omega b_+^{(1)} + O(\omega^2) + \mathcal{G}_k(\omega) (b_-^{(0)} + \omega b_-^{(1)} + O(\omega^2))}{a_+^{(0)} + \omega a_+^{(1)} + O(\omega^2) + \mathcal{G}_k(\omega) (a_-^{(0)} + \omega a_-^{(1)} + O(\omega^2))} \quad (2.61)$$

a 和 b 均为动量的函数，一般情况下难以用解析方法求出， \mathcal{G} 为 AdS_2 背景中的费米子两点关联函数，它具有 ω 的指数形式，指数极为 $2\nu_k$ 费米面的位置满足 $a_+^{(0)}(k_F) = 0$ ，此时格林函数化为 ($\nu_{k_F} \neq \frac{1}{2}$):

$$G_R(\omega, k) = \frac{h_1}{k - k_F - \frac{1}{v_F}\omega - h_2 e^{i\gamma_{k_F}} \omega^{2\nu_{k_F}}} \quad (2.62)$$

并且，在 k_F 附近，格林函数极点处的留数为：

$$Z = \begin{cases} -\frac{\omega_c h_1}{2\nu_{k_F} k_\perp} & \nu_{k_F} < \frac{1}{2} \\ -h_1 \nu_F & \nu_{k_F} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.63)$$

其中 k_\perp 代表动量里费米面的距离， ω_c 为 k 所对应的 ω 极点。可以看出，在 $\nu_{k_F} < \frac{1}{2}$ 的情况下，留数在费米动量处等于0，没有准粒子的良好定义，而且自能修正在低能极限下控制着格林函数的行为，这正符合非费米液体的特点，而对于 $\nu_{k_F} > \frac{1}{2}$ 的情况，准粒子有良好定义，且在低能极限下于自由费米液体行为一致。特别的，对于 $\nu_{k_F} = \frac{1}{2}$ ，有：

$$G_R(\omega, k) = \frac{h_1}{k_\perp + \tilde{c}_1 \omega \log + c_1 \omega} \quad (2.64)$$

这正是Varma等人用来描述最佳掺杂铜氧化物所用到的边缘费米液体^[7]。可以看到，在渐近AdS时空的RN黑洞背景中，可以实现一系列非费米液体现象。

2.2.2 非费米液体电导率的计算

在这一部分中，我们将介绍全息非费米液体电导率的计算。同样，由于主要

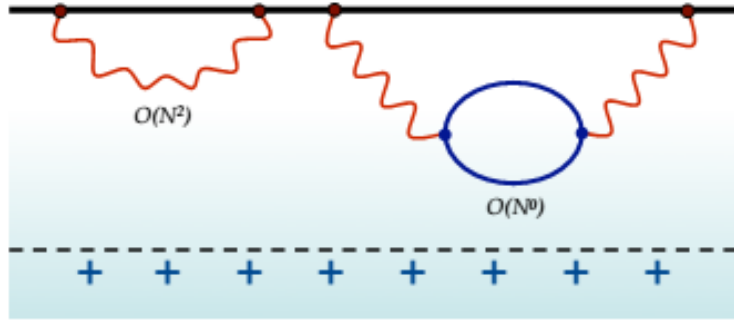


图 2.1: 电导率计算示意图

计算步骤和第三章部分类似，这里只阐述计算结果（该结果为解析结果，但与温度和频率的依赖关系由微扰展开求出）²。

对于电导率的计算，关键步骤是求解电流的推迟格林函数。这在前面第一节已经展示过，得到延时格林函数后，可以利用Kubo 方程求出电导率：

$$\sigma(\Omega) = \frac{1}{i\Omega} \langle J_y(\Omega) J_y(-\Omega) \rangle_{\text{retarded}} = \frac{1}{i\Omega} G_R^{yy} \quad (2.65)$$

J_y 是 $U(1)$ 规范场在零动量时的在 y 方向的动量密度。直流电导率为：

$$\sigma_{DC} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \sigma(\Omega) \quad (2.66)$$

对于上一节所采用的含费米子和 $U(1)$ 规范场的渐近AdS背景，电导率的贡献一共分为两部分，第一部分为树图结构的贡献，它来自于直接对作用量求解规范场的响应，第二部分是费米子的贡献，由于费米子和规范场耦合，再将费米子给定边界为0并且路径积分后，会产生一个规范场的泛函，来对电导率进行响应，如图??所示。根据Thomas Faulkner等人的计算，电导率的两部分分别呈现不同的贡献。对于第一部分，规范场的直接响应，其领头项符合理想的具有平移不变性的“干净”系统的结果：

$$\sigma(\Omega) = \mathcal{K}(d-2) \frac{r_*^{d-2}}{R^2} \frac{i}{\Omega} + \mathcal{K} \left(\frac{d-2}{d(d-1)} \right)^{d-3} \left(\frac{\mu}{e_d} \right)^{d-5} (\Omega^2 + (2\pi T)^2) + \dots \quad (2.67)$$

² 本节内容和图片参照[?]]

可以看到，除掉理想情形的第一项外，第二项给出的两个贡献分别正比于频率的平方和温度的平方。对于费米子参与贡献的第二部分，形式比较复杂，对于直流电导率，它的贡献为：

$$\sigma_{DC} = \alpha T^{-2\nu_{k_F}} \quad (2.68)$$

对于光学电导率，将按照费米子在费米面处的共形维度 ν_{k_F} 进行讨论。当 $\nu_{k_F} < \frac{1}{2}$ 时，费米子给出的光学电导率为：

$$\sigma(\Omega) = T^{-2\nu_{k_F}} F_1(\Omega/T) \quad (2.69)$$

当 $\nu_{k_F} > \frac{1}{2}$ 且 $u = \frac{\Omega}{T^{2\nu_{k_F}}}$ 固定， $uT^{2\nu_{k_F}-1} \rightarrow 0$ 时，光学电导率为：

$$\sigma(\Omega) = T^{-2\nu_{k_F}} F_2(\Omega/T) \quad (2.70)$$

而 $s = \frac{\Omega}{T}$ 固定时，结果为：

$$\sigma(\Omega) = \frac{i\omega_p^2}{\Omega} \left(1 + T^{2\nu_{k_F}-1} k(s) + \dots \right) \quad (2.71)$$

当 $\nu_{k_F} = \frac{1}{2}$ 时，结果为：

$$\sigma(\Omega) = T^{-1} F_3(\Omega/T, \log \frac{T}{\mu}) \quad (2.72)$$

最后一个情形正是上一节提到的边缘费米液体情形，而它与温度成正比的电阻率行为与凝聚态物理中的结果一致。因此，电导率的计算也说明了AdS/CFT对偶性对费米子系统的研究可能会起重大作用。

2.2.3 渐近AdS时空RN黑洞与重费米子系统的关系

从费米子的关联函数形式(??)中可以看到，它的倒数为一个自由费米液体耦合上一个具有奇异性的自能项，这个关联函数的结果可以用如下的有效作用量进行描述：

$$S = S_{\text{strong}} + \int \left\{ \chi^\dagger (i\partial_t - \varepsilon_k + \mu) \chi + g_k \chi_x^\dagger \Psi_k + g_k^* \Psi_k^\dagger \chi \right\} \quad (2.73)$$

方程的第二项描述了一个自由的费米子 χ ，它与另外一个费米子场 Ψ 存在着交换作用，而 S_{strong} 是 Ψ 的作用量，为强耦合部分，它给出了如下的关于 Ψ 的格林函数：

$$\mathcal{G}_k = c_k \omega^{2\nu_k - 1} \quad (2.74)$$

于是可以很容易得到， χ 的格林函数形式如(??)相同，于是AdS时空理论所描述的量子场论的确可以用形如(??)的表达式来描述。注意到，这个理论中存在着两种费米子，并且它们之间仅仅通过交换作用进行耦合，这与重费米子中的情形十分类似。在重费米子中，也存在着两种费米子，一种是巡游电子，它们的行为类似于自由的费米液体，另一种是来自原子内部的 f 或 d 轨道电子，它们被束缚在原子内部，很难自由移动，并且两种电子之间存在着Kondo交换作用。

Subir Sachdev进一步研究了这种相似性[?]。在他的文章中，主要研究了重费米子中强耦合部分的格林函数，发现它的确符合 AdS_2 的形式。首先将周期性Anderson模型写成 $H_A = H_0 + H_1[d, c] + H_U$ 的形式， c 和 d 分别为巡游电子和内层轨道电子， H_0 是巡游电子的自由的哈密顿量， $H_1 = \int V_k d_{k\alpha}^\dagger c_{k\alpha} + \text{c.c}$ 是两种电子之间的Kondo交换作用， H_U 的形式为：

$$H_U = \sum_i \left[U n_{di\uparrow} n_{di\downarrow} + (\varepsilon_d - U/2 - \mu) d_{i\alpha}^\dagger d_{i\alpha} \right] - \sum_{i \neq j} t_{ij} d_{i\alpha}^\dagger d_{j\alpha} \quad (2.75)$$

n_i 为第 i 个格点处的 d 电子数目 d 的第二个角标表示自旋状态。将这个模型在大 U 极限下作Schrieffer-Wolff变换[?]， $H_A \rightarrow \mathcal{U} H_A \mathcal{U}^{-1}$ ， $\mathfrak{d} = \mathcal{U} d \mathcal{U}^{-1}$ ：

$$H_A = H_0 + H_1[\mathfrak{d}, c] + H_J \quad (2.76)$$

$$\mathfrak{d}_{i\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}^a}{2} \int \frac{d^2 k}{4\pi^2} \left[\frac{UV_k e^{-ikx}}{U^2/4 - (\varepsilon_d - \varepsilon_k)^2} \right] c_{k\beta} S_i^a \quad (2.77)$$

S_i^a 是 i 点的 d 电子自旋算符， $H_J = \sum_{i < j} S_i^a S_j^a$ 是自旋之间的海森堡耦合作用。为了计算 d 电子的格林函数，Sachdev首先计算了 S 的关联函数，他假设 S 之间的海森堡作用实现了SY无能隙自旋液体模型[?]，这个模型在大 N （大 N 极限为将 $SU(2)$ 的自旋推广为 $SU(N)$ 并且 N 趋于无穷的极限）极限下，自旋之间的关联函数为：

$$\langle S_i(\tau) S_i(0) \rangle \sim \frac{\pi T}{\sin(\pi T \tau)} \quad (2.78)$$

结合费米子的格林函数：

$$\langle c_i(\tau)c_i(0) \rangle \sim \frac{\pi T}{\sin(\pi T\tau)} \quad (2.79)$$

忽略不在位的相互作用，最终得到 d 电子的关联函数为：

$$\langle d_k(\tau)c_k(0) \rangle \sim \left[\frac{\pi T}{\sin(\pi T\tau)} \right]^2 \quad (2.80)$$

这符合 AdS_2 的结果，因此，可以看到，重费米子系统不仅仅在模型的形式上与AdS理论的有效场论相似，并且关联函数也有着类似的结果，这为AdS/CFT对偶性在重费米子方面的研究提供了基础。

第三章 利用AdS/CFT计算非费米液体的磁化率

3.1 规范场的响应

3.1.1 内外区域划分

这一节中，我们将详细阐述如何求解在渐近AdS时空的RN黑洞的响应函数问题，采取的主要手段被称作视界附近内外匹配方法。为了阐述我们的问题，以及让问题的维度更一般化，我们选取作用量为如下形式：

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} + \frac{d(d-1)}{R^2} - \frac{R^2}{g_F^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (3.1)$$

花体的 \mathcal{R} 为Ricci标量，普通的 R 为渐近AdS时空的半径。它的度规为^[? ?]：

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{ii} d\vec{x}^2 \\ &= \frac{r^2}{R^2} (-h dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} \frac{dr^2}{h} \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中函数 h 以及规范场为：

$$h = 1 + \frac{Q^2}{r^{2d-2}} - \frac{M}{r^d}, \quad A_t = \mu \left(1 - \frac{r_0^{d-2}}{r^{d-2}} \right) \quad (3.3)$$

Q 为黑洞所带电荷， M 为类似于质量的一个常数。它的视界的定义为 $h(r_0)$ 等于0的

较大的那个根。根据这个定义，有关系式：

$$M = r_0^d + \frac{Q^2}{r_0^{d-2}} \quad (3.4)$$

出了视界外，另外一个十分有用的长度单位为 r_* ，它标记了黑洞电荷的大小，定义如下：

$$Q = \sqrt{\frac{d}{d-2}} r_*^{d-1} \quad (3.5)$$

通过 r_* 可以将化学势和黑洞的温度表达为：

$$\nu = \frac{d(d-1)}{d-2} \frac{r_*}{R^2} \left(\frac{r_*}{r_0}\right)^{d-2} e_d \quad (3.6)$$

$$T = \frac{dr_0}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{r_*^{2d-2}}{r_0^{2d-2}}\right) \quad (3.7)$$

e_d 为：

$$e_d = \frac{gf}{\sqrt{2d(d-1)}} \quad (3.8)$$

在视界附近处，上述的度规会表现为 $AdS_2 \times R^{d-1}$ 的形式，对于 $T = 0$ ，AdS部分将是严格的 AdS_2 ，而对于 $T \neq 0$ 的情形，AdS部分是有限温度的渐近 AdS_2 形式。在 $T = 0$ 时，有 $r_* = r_0$ 和 $M = \frac{2(d-1)}{d-2} r_*^d$ ，此时 $h(r_0)$ 的两个解将相等，可以将它展开到 $r - r_0$ 的二阶项：

$$f = d(d-1) \frac{(r - r_*)^2}{r_*^2} + \dots \quad (3.9)$$

定义 $R_2 = \frac{1}{\sqrt{d(d-1)}} R$ ，于是作下列变换，可以将度规(??)转化为 $AdS_2 \times R^{d-1}$ 的形式：

$$r - r_* = \lambda \frac{R_2^2}{\zeta}, \quad t = \lambda^{-1} \tau, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

把度规(??)按照 λ 的幂次展开到二阶项，可以得到如下的 $AdS_2 \times R^{d-1}$ 形式：

$$ds^2 = \frac{R_2^2}{\zeta^2} \left(-d\tau^2 + d\zeta^2\right) + \frac{r_*^2}{R^2} d\vec{x}^2 \quad (3.11)$$

而规范场在这个度规下变为：

$$A_\tau = \frac{e_d}{\tau} \quad (3.12)$$

对于有限温的情形，度规呈现渐近 AdS_2 的形式，此时需要定义：

$$r_0 - r_* = \lambda \frac{R_2^2}{\zeta_0} \quad (3.13)$$

并且依旧按照 λ 的幂次将(??)展开到二阶项，得到度规形式如下：

$$ds^2 = \frac{R_2^2}{\zeta^2} \left(- \left(1 - \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2} \right) d\tau^2 + \frac{d\zeta^2}{1 - \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}} \right) + \frac{r_*^2}{R^2} d\vec{x}^2 \quad (3.14)$$

而规范场和温度变为：

$$A_\tau = \frac{e_d}{\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0} \right) \quad (3.15)$$

$$T = \frac{1}{2\pi\zeta_0} \quad (3.16)$$

注意到由于我们去了 $\lambda \rightarrow 0$ 的极限，一般来讲 ζ_0 将趋于无穷大，于是为了让上面的渐近 AdS_2 度规有意义，我们必须取温度极低时的情形，并把它看做是按照极小的 λ 展开时的结果。为了便于后面的计算，我们将 T 消去，引入无量纲坐标：

$$\xi = T\zeta = \frac{TR_2^2}{r - r_*}, \quad \xi_0 = T\zeta_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad \tau = \tau T \quad (3.17)$$

于是有：

$$A_\tau = \frac{e_d}{\xi} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) \quad (3.18)$$

3.1.2 内外区域匹配和解的求出

完成了视界附近区域的坐标和度规变换定义后，我们要来研究作用量(??)对规范场扰动的响应。这个响应来自两个部分，一个是作用量中 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 对规范场的响应，这个部分类似于通常的Maxwell方程，另外一部分响应来自于伴随规范场扰动而产生的度规的扰动，这时由于规范场存在一个不为零的时间分量的直接结果。我们选取规范场的扰动如下：

$$A_M \rightarrow A_0 \delta_{M0} + a_M, \quad g_{MN} \rightarrow g_{MN} + h_{MN} \quad (3.19)$$

并且利用规范对称性和微分同胚对称性选择规范如下：

$$h_{rM} = a_r = 0 \quad (3.20)$$

于是对于Maxwell项来说，它的变分形式如下：

$$S_{EM} = -C_1 \int d^{d+1} \left[\frac{1}{4} \sqrt{-g} f_{MN}^{MN} - \frac{1}{2} E_r (\sqrt{-g} g^{tt} g^{rr} + \sqrt{-g} g^{tr} g^{tr})_{(2)} E_r - E_r (g^{tt} g^{rr} \sqrt{-g})_{(1)} f_{0r} - \mathcal{Q} (h_t^i f_{ir} + h_r^i f_{ti}) \right] \quad (3.21)$$

\mathcal{Q} 和 C_1 分别为常数， $\mathcal{Q} = -E_r \sqrt{-g} g^{tt} g^{rr}$ ， $C_1 = \frac{2R^2}{g_F^2 \kappa^2}$ ，方程中的下表表示按照度规中 h 的幂次展开所到的阶数。利用这个变分项，并结合系统的各向同性，我们取扰动 a_i 仅包括 y 分量，而波矢沿 z 方向，可以得到 a_y 的方程为：

$$\pi^y = -\sqrt{-g} g^{rr} g^{yy} a_y' - \mathcal{Q} h_t^y \quad (3.22)$$

$$\partial_r \pi_y - \sqrt{-g} g^{yy} (g^{tt} \Omega^2 - g^{zz} k^2) a_y = 0 \quad (3.23)$$

对于规范场引起的引力扰动 h_y^t ，我们需要对作用来量求度规的变分，对于它的第一项 \mathcal{R} ，它的变分可以通过求解Ricci张量，并且保留 h 的线性部分得到，选取Ricci张量的分量 R_{yr} ，得到度规扰动与规范场扰动的重要关系式：

$$2\kappa^2 C_1 \mathcal{Q} a_y = -\sqrt{-g} g_{yy} g^{rr} g^{tt} \partial_r h_t^y \quad (3.24)$$

结合这三个方程，我们可以得到规范场的运动方程如下：

$$\partial_r (\sqrt{-g} g^{rr} g^{yy} \partial_r a_y) - \sqrt{-g} g^{yy} (m_{eff}^2 - g^{tt} \Omega^2 + g^{zz} k^2) a_y = 0 \quad (3.25)$$

有效质量 m_{eff} 的大小为：

$$m_{eff}^2 = \frac{2r_*^{2d-2} d(d-1)}{r^{2d-2} R^2} \quad (3.26)$$

现在需要求解方程(??)，由于 Ω 项前面的系数在接近视界时发散，所以对于小的 Ω 时的微扰论解法，必须将视界附近区域和视界外区域分开对待。取 r_c 定义如

下（这个定义仅可以在温度很低的情况下满足）：

$$\frac{r_c - r_*}{r_*} \ll 1, \quad \xi_c = \frac{TR_2^2}{r_c - r_*} \ll 1 \quad (3.27)$$

我们将 $r > r_c$ 的区域成为外区域， $r < r_c$ 的区域成为内区域。对于外区域，我们采取原先的以 r 为坐标的度规，对于内区域，我们采取以 ξ 为坐标的度规。在 $T \rightarrow 0$ 的情形下， r_c 满足：

$$r_c - r_* \rightarrow 0, \quad \xi_c \rightarrow 0 \quad (3.28)$$

在视界附近，有 $m_{eff}^2 R_2^2 = 2$ ，并且可以将运动方程按照 T 和 Ω 的幂次展开，对于领头项，方程的形式为：

$$\partial_\xi \left(\sqrt{-g} g^{\xi\xi} g^{yy} \partial_\xi a_y \right) - \sqrt{-g} g^{yy} \left(m_{eff}^2 - g^{\tau\tau} \Omega^2 + g^{zz} k^2 \right) a_y = 0 \quad (3.29)$$

其中 g 均以公式(??)中的结果带入，对于 $T \rightarrow 0$ 的情形，我们可以得到这个方程在 ξ_c 附近的两个渐近解分别为：

$$\eta_I^+(\xi, s) \rightarrow \xi^{\frac{1}{2}-\nu} = \left(\frac{TR_2^2}{r - r_*} \right)^{\frac{1}{2}-\nu} \quad (3.30)$$

$$\eta_I^-(\xi, s) \rightarrow \xi^{\frac{1}{2}+\nu} = \left(\frac{TR_2^2}{r - r_*} \right)^{\frac{1}{2}+\nu} \quad (3.31)$$

共形维度 ν 的大小为：

$$\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{R^2}{r_*^2} k^2 R_2^2} \quad (3.32)$$

而 s 为无量纲频率 Ω/T 。为了让最后的解在视界处 ξ_0 满足出射条件，可以得到在 ξ_c 处的规范场的解应该为：

$$a_y = \eta_I^+ + \mathcal{G}(s) \eta_I^- \quad (3.33)$$

\mathcal{G} 为有限温度时的 AdS_2 延时格林函数：

$$\mathcal{G}(s) = (4\pi)^\nu \frac{\Gamma(-2\nu) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu - \frac{is}{2\pi} + iqe_d) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu - iqe_d)}{\Gamma(2\nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu - \frac{is}{2\pi} + iqe_d) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu - iqe_d)} \quad (3.34)$$

同时，我们在 T 和 Ω 的领头项上求解外区域在 r_c 附近时的渐近解，可以得到它们与(??)和(??)形式上相同，分别为：

$$\eta_O^+ \rightarrow \left(\frac{r - r_*}{R_2^2} \right)^{\frac{1}{2} + \nu} \quad (3.35)$$

$$\eta_O^+ \rightarrow \left(\frac{r - r_*}{R_2^2} \right)^{\frac{1}{2} - \nu} \quad (3.36)$$

于是内部区域和外部区域的解通过下式进行匹配：

$$\eta_O^+ \leftrightarrow T^{\frac{1}{2} + \nu} \eta_I^+, \quad \eta_O^- \leftrightarrow T^{\frac{1}{2} - \nu} \eta_I^- \quad (3.37)$$

于是方程(??)在外部区域的解为：

$$a_y = T^{\frac{1}{2} - \nu} \eta_O^+ + \mathcal{G}(s) T^{\frac{1}{2} + \nu} \eta_I^- \quad (3.38)$$

最后为了求解最终的格林函数，由1.4节知道，必须得到在 $r \rightarrow \infty$ 时的渐近解形式。从(??)可以解出，有两个渐近解— $a_y \sim$ 常数和 $a_y \sim r^{2-d}$ ，于是令 η^\pm 可以分别表达为：

$$\eta_O^\pm \rightarrow \mathbf{a}(k)_\pm + \mathbf{b}(k)_\pm r^{2-d}, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.39)$$

于是我们最终得到规范场的直接响应函数（区别为后面提到的费米子贡献）为：

$$G_A(\Omega, k; -\Omega, -k) = (d-2) \frac{2R^{3-d} \mathbf{b}_+ + \mathcal{G}(s) T^{2\nu} \mathbf{b}_-}{\kappa^2 g_F^2 \mathbf{a}_+ + \mathcal{G}(s) T^{2\nu} \mathbf{a}_-} \quad (3.40)$$

对于磁化率来说，它是系统对磁场的响应函数，根据磁场和矢势的关系，可以得到动态磁化率为：

$$\chi(\Omega, k; -\Omega, -k) = (d-2) \frac{2R^{3-d} \mathbf{b}_+ + \mathcal{G}(s) T^{2\nu} \mathbf{b}_-}{\kappa^2 g_F^2 k^2 \mathbf{a}_+ + \mathcal{G}(s) T^{2\nu} \mathbf{a}_-} \quad (3.41)$$

3.2 费米子对磁化率的贡献

3.2.1 圈图计算形式

由于费米子与规范场存在着耦合，当路径积分中将费米子场积掉后，将存在着额外的规范场的作用量，这将贡献另外一部分系统对规范场的响应。在这一部分，为了简化边界条件和格林函数的选择，计算将现在欧几里德度规符号下完成，在解析延拓得到闵可夫斯基符号下的结果。费米子的作用量如下：

$$S = -i \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \psi (\Gamma^M \mathcal{D}_M - m) \psi \quad (3.42)$$

把协变倒数写为如下的形式：

$$\mathcal{D}_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_{abM} \Gamma^{ab} - iq A_M \quad (3.43)$$

M, N 是时空坐标， a, b 是局域闵可夫斯基时空的坐标， Γ 矩阵的定义为：

$$\Gamma^M = \Gamma^a e_a^M \quad (3.44)$$

Γ^a 为平直闵可夫斯基时空中的 Γ 矩阵， e_a^M 是时空标架，满足：

$$e_a^M g_{MN} e_b^N = \eta_{ab} \quad (3.45)$$

η_{ab} 为闵可夫斯基时空度规。因此，为了求解费米子行为，必须先求出所需要的自选联络。自选联络的计算方式如下^[?]：

$$\omega_{bca} = \frac{1}{2} (\Omega_{abc} + \Omega_{cab} - \Omega_{bca}) \quad (3.46)$$

Ω_{abc} 的定义为：

$$\Omega_{abc} = e_a^M e_b^N \partial_{[M} e_{N]c} \quad (3.47)$$

对于前面所用到的度规(??)，它的不为0的自旋联络为：

$$\omega_{\underline{trt}} = -\frac{1}{2} \frac{g'_{tt}}{g_{tt}} \sqrt{g^{rr}}, \quad \omega_{\underline{iri}} = \frac{1}{2} \frac{g'_{ii}}{g_{ii}} \sqrt{g^{rr}} \quad (3.48)$$

上式中带下划线的为局域闵可夫斯基坐标。于是，AdS时空的狄拉克方程为：

$$\left[-i(\omega + 1A_t)\Gamma^t + ik_i\Gamma^i + \Gamma^r(\partial_r + U) - m \right] \psi(\omega, \vec{k}; r) = 0 \quad (3.49)$$

$U = \frac{1}{4} \partial_r \log(-gg^{rr})$ 现在，我们考虑了规范场有一个扰动，由前面一部分知道，这会导致度规存在扰动，因此自旋联络将发生变化，将扰动后的度规写作下列形式：

$$ds^2 = \tilde{g}_{tt} dt^2 + h(dy + bdt)^2 + g_{rr} dr^2 + hdx_i^2 \quad (3.50)$$

其中

$$b = h_t^y, \quad \tilde{g}_{tt} = g_{tt} + hb^2 \quad (3.51)$$

经过计算，可以得到下面不为0的自旋联络：

$$\omega_{\underline{tyr}} = f_2 \quad (3.52)$$

$$\omega_{\underline{trt}} = -\tilde{f}_0, \quad \omega_{\underline{try}} = f_2 \quad (3.53)$$

$$\omega_{\underline{yry}} = f_1, \quad \omega_{\underline{yrt}} = f_2 \quad (3.54)$$

$$\omega_{\underline{iri}} = f_1 \quad (3.55)$$

$$\omega_{\underline{ztt}} = -2f_3 \quad (3.56)$$

$$\omega_{\underline{tyz}} = f_4 \quad (3.57)$$

上面式中的各个函数如下：

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \sqrt{g^{rr}}, \quad f_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{g_{rr} \tilde{g}_{tt}}} b', \quad \tilde{f}_0 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{g}'_{tt}}{\tilde{g}_{tt}} \sqrt{g^{rr}} \quad (3.58)$$

$$f_3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial_z \sqrt{\tilde{g}_{tt}}}{\sqrt{g_{zz} \tilde{g}_{tt}}}, \quad f_4 = \frac{\sqrt{h} \partial_z b}{2\sqrt{g_{zz} \tilde{g}_{zz}}} \quad (3.59)$$

于是将上述的自旋联络带入协变导数中，并注意到标架存在 y 和 t 方向的混合，可

以得到费米子部分的扰动拉氏量为（展开到一阶）：

$$\delta\mathcal{L} = -i\bar{\psi} \left(-g_{tt}^{-\frac{1}{2}} h_t^y \Gamma^t \partial_y + \frac{1}{4} f_2 \Gamma^{rty} - i h^{-\frac{1}{2}} q a_y \Gamma^y + \frac{1}{4} f_4 \Gamma^{tyz} \right) \psi \quad (3.60)$$

可以看出，括号内的量为费米子与规范场相互作用的顶点，于是将费米子路径积分后，可以得到有效作用量（欧几里德符号下）如下：

$$\begin{aligned} S_{eff} = & -\frac{T^2}{2} \sum_{\omega_m, \Omega_l} \int_{k, K_l} \int_k \int dr_1 \sqrt{g(r_1)} dr_2 \sqrt{g(r_2)} \times \\ & \text{tr} \left(D_E(r_1, r_2; i\omega_m + i\Omega_l, \vec{k} + \vec{K}_l) \right. \\ & \left. B(r_2; \Omega_l, \vec{K}_l) D_E(r_2, r_1; i\omega_m, \vec{k}) B(r_1; -\omega, -\vec{K}_l) \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

B 为费米子和规范场的相互作用顶点，它由(??)括号中的项的傅里叶变换给出。 D_E 为费米子在欧几里德符号AdS时空内部的传播子，它可以进行谱分解变为下面的形式：

$$D_E(r_1, r_2; i\omega_m, \vec{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho(r_1, r_2; \omega, \vec{k})}{i\omega_m - \omega} \quad (3.62)$$

对于谱函数，进一步它可以用边界理论写为：

$$\rho(r, r'; \omega, \vec{k}) = \psi_\alpha(r; \omega, \vec{k}) \rho_B^{\alpha\gamma}(\omega, \vec{k}) \bar{\psi}_\gamma(r'; \omega, \vec{k}) \quad (3.63)$$

ψ 为狄拉克方程在边界条件为0时的解，而 ρ_B 为费米子的延时格林函数的谱函数，它只与边界坐标有关。将规范场和度规扰动的解用边界条件写出：

$$a_y(r; i\Omega_l, \vec{K}_l) = K_A(r; i\Omega_l, \vec{K}_l) A_j(i\Omega_l, \vec{K}_l) \quad (3.64)$$

$$h_t^y(r; i\Omega_l, \vec{K}_l) = K_h(r; i\Omega_l, \vec{K}_l) A_j(i\Omega_l, \vec{K}_l) \quad (3.65)$$

于是可以把 B 写作：

$$B(r; \Omega_l, \vec{K}_l) = \sum_j Q^j(r; i\Omega_l, \vec{K}_l) a_j(i\Omega_l, \vec{K}_l) \quad (3.66)$$

而 Q 为:

$$Q^j = (r, i\Omega_l, \vec{K}_l) = -i \left(-ik_j K_h \Gamma^t + \frac{g_{ij}}{8} \partial_r K_h \Gamma^{rtj} - iq K_A \Gamma^j + \frac{1}{4} f_4' \Gamma^{tiz} \right) \quad (3.67)$$

将以上表达式带入到作用量中, 可以得到费米子所贡献的格林函数为:

$$G_E^{ij}(i\Omega_l, \vec{K}_l) = -T \sum_{\omega_m} \int_k \int dr_1 \sqrt{g(r_1)} dr_2 \sqrt{g(r_2)} \text{tr} \left(D_E(r_1, r_2; i\omega_m + i\Omega_l, \vec{k} + \vec{K}_l) \right. \\ \left. Q^i(r_2; \Omega_l, \vec{K}_l) D_E(r_2, r_1; i\omega_m, \vec{k}) Q^j(r_1; -\omega, -\vec{K}_l) \right) \quad (3.68)$$

利用关系式

$$T \sum_{\omega_m} \frac{1}{i(\omega_m + \Omega_l) - \omega_1} \frac{1}{i\omega_m - \omega_2} = \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} \quad (3.69)$$

$f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}$ 并结合前面所用到的谱分解表达式, 格林函数最终可以被写作:

$$G_E^{ij}(i\Omega_l, \vec{K}_l) = - \int_k \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} \rho_B^{\alpha\beta}(\omega_1, \vec{k} + \vec{K}_l) \Lambda_{\beta\gamma}^i(\omega_1, \omega_2; \Omega_l, \vec{K}_l) \\ \rho_B^{\gamma\delta}(\omega_1, \vec{k}) \Lambda_{\delta\alpha}^j(\omega_2, \omega_1; -\Omega_l, -\vec{K}_l) \quad (3.70)$$

这样就将费米子的贡献写为了纯粹以边界项表出的形式, Λ 为边界的相互作用顶点:

$$\Lambda_{\beta\gamma}^i(\omega_1, \omega_2; \Omega_l, \vec{K}_l) = \int dr \sqrt{g} \bar{\psi}_\beta(r, \omega_1, \vec{k} + \vec{K}_l) Q^i(r; i\Omega_l, \vec{K}_l) \psi_\gamma(r; \omega_2, \vec{k}) \quad (3.71)$$

$$\Lambda_{\delta\alpha}^i(\omega_2, \omega_1; -\Omega_l, -\vec{K}_l) = \int dr \sqrt{g} \bar{\psi}_\delta(r, \omega_2, \vec{k}) Q^i(r; -i\Omega_l, -\vec{K}_l) \psi_\alpha(r; \omega_2, \vec{k} + \vec{K}_l) \quad (3.72)$$

为了求解费米子对磁化率的贡献, 关键是要得到上式中的有效顶点 Λ 和 ρ_B , 对于边界上的谱函数, 在前面提到的^[7]中已经得出, 它在费米面附近的结果为:

$$\rho_B = 2\text{Im} G^R = \frac{2h_1 \text{Im}\Sigma}{(k - k_F(\omega, T) - \text{Re}\Sigma)^2 + (\text{Im}\Sigma)^2} \quad (3.73)$$

其中自能项的形式为:

$$\Sigma(\omega, T; k_F) = T^{2\nu'_{k_F}} g \left(\frac{\omega}{T}; \frac{k_F}{\mu} \right) \quad (3.74)$$

ν'_{k_F} 为费米子在费米动量处的共形维度。对于 Λ 项，由于它的求解十分困难，只能在理论分析它随温度变化所展示的标度现象。为了计算方便，可以证明，通过选取合适的基底， ρ_B 将对角化。在这个基底上，我们来求解费米子部分随温度变化而表现的最奇异的贡献。对于 \vec{k} 的积分，我们采取以 \vec{K}_l 为轴的柱坐标，将 \vec{k} 分解为垂直于 \vec{K}_l 的 k_\perp 部分和平行于 \vec{K}_l 的 k_l 部分。利用旋量和矢量在转动群下变换的性质，可以将 k_\perp 选为 y 轴，有：

$$\rho_B(\vec{k}) = U(\theta)\rho_B(\vec{k}_l + \vec{k}_y)U^\dagger(\theta) \quad (3.75)$$

$$\Lambda_i(\vec{k}) = R_{ij}U(\theta)\Lambda_j(\vec{k}_l + \vec{k}_y)U^\dagger(\theta) \quad (3.76)$$

U 为旋量绕 \vec{K}_l 轴的旋转矩阵，使其动量在 \vec{K}_l 轴的垂直方向的分量沿 y 轴， R_{ij} 为相应的矢量的旋转矩阵。这样我们可以把 k 的垂直于 \vec{K}_l 轴的角向积分积掉，得到仅含 k_l 和 k_\perp 的积分。利用下面的表达式：

$$\frac{1}{(2\pi)^{d-2}} \int d^{d-3}\theta R_{ik}(\theta)R_{jl}(\theta) = C\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3.77)$$

C 为某个归一化常数， $d^{d-3}\theta$ 表示角向积分的测度。可以知道，在垂直于 \vec{K}_l 轴的方向的磁化率将对角化（即仅包含形如 χ_{xx} 、 χ_{yy} 的项，而不包括 χ_{xy} 形式的项），又由于 \vec{K}_l 的任意性，沿不同轴的磁化率将不会混合，呈完全对角形式：

$$\chi_{ij} = \delta_{ij}\chi \quad (3.78)$$

现在来计算对角化的格林函数：

$$G_E(i\Omega_l, \vec{K}_l) = -C \int k_\perp^{d-3} dk_l dk_\perp \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} \rho_B^{\alpha\beta}(\omega_1, \vec{k} + \vec{K}_l) \sum_i \Lambda_{\beta\gamma}^i(\omega_1, \omega_2; \Omega_l, \vec{K}_l) \rho_B^{\gamma\delta}(\omega_1, \vec{k}) \Lambda_{\delta\alpha}^i(\omega_2, \omega_1; -\Omega_l, -\vec{K}_l) \quad (3.79)$$

3.2.2 磁化率随温度的变化行为

由于我们关心的是磁化率随温度的标度问题，我们将上述表达式中各项随温度的变化规律分别写出。对于 Λ 项来说，它分为两个部分， Q 和 ψ ，对于 Q 来

说，它随温度的变化规律仅与 K_h 和 K_A 有关，由于(??)可知， $\partial_r K_h = -C g_{ii}^{-\frac{d+1}{2}} K_A$ ， C 为一个常数，所以它们将有着相同的对温度的依赖关系：

$$K_h \sim K_A \quad (3.80)$$

利用前一节求得的结果我们知道， K_A 在内外区域对温度的依赖关系分别为：

$$K_A = \frac{\eta_O^+}{a_+} + iO(T^{2\nu}), \quad r \sim r_* \quad (3.81)$$

$$K_A = T^{-\frac{1}{2}+\nu} K_A(s, \xi, \vec{K}_l) + O(T^{-\frac{1}{2}+3\nu}) \quad \xi \sim \xi_c \quad (3.82)$$

其中 $K_A(s, \xi, \vec{K}_l) = \frac{1}{a_+}(\eta_I^+ + \mathcal{G}_y \eta_I^-)$ 。对于费米子部分，它的结果为^[?]：

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \omega \Phi^{(1)} \quad r \sim r_* \quad (3.83)$$

$$\Psi = \frac{a_+^{(0)}}{W} T^{-\nu_k} \Psi_I^- \quad \xi \sim \xi_c \quad (3.84)$$

$a_+^{(0)}$ 和 W 是一些和动量有关的常数， Ψ_I^\pm 也是不显依赖于温度的函数，上述表达式在接近于费米面附近时，要修改为如下形式：

$$\Phi = \frac{1}{W} [a_+ T^{-\nu_{k_F}} \Psi_I^- - a_- T^{\nu_{k_F}} \Psi_I^+] \quad (3.85)$$

其中 $a_+ = c_1(k - k_F) - c_2\omega + c_3T + \dots = c_1(k - k_F(\omega, T))$ (系数 c 为实数)，并引入推广的费米动量 $k_F(\omega, T) = k_F + \frac{1}{v_F}\omega - \frac{c_3}{c_1}T + \dots$

有了 ρ 和 Λ 关于温度的依赖关系，现在可以来求出费米子磁化率对温度的最低阶依赖关系。首先，考虑远离费米动量的一般情形。对于 Λ 来说，它包含一个对 r 的积分，积分在内区域给出的贡献为：

$$\Lambda \propto a_+^{(0)} a_+^{(0)} T^{-\frac{1}{2}+\nu-\nu'_k-\nu'_k+\kappa_l} + \dots \quad (3.86)$$

对于外区域，它的领头项不依赖于温度：

$$\Lambda = \Lambda_0 + \dots \quad (3.87)$$

对于 ρ 来说，在远离费米动量的地方，有：

$$\rho_B \sim T^{2\nu'_k} \quad (3.88)$$

将积分重新写为下列的形式：

$$G_E = C \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} \int k_{\perp}^{d-3} d^2 k \mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, k; \Omega_l, \vec{K}_l, T) \quad (3.89)$$

我们得到，在远离费米面处， \mathcal{I} 对温度的依赖关系为：

$$\mathcal{I} \sim T^{-1+2\nu} \quad \nu'_k + \nu'_{\vec{k}+\vec{K}_l} - \nu > -\frac{1}{2} \quad (3.90)$$

$$\sim T^{-1+2\nu} \quad \nu'_k + \nu'_{\vec{k}+\vec{K}_l} - \nu < -\frac{1}{2} \quad (3.91)$$

可以看到，对于这部分贡献来说，它在低温下的温度的指数为正，视具体的参数范围，可以比规范场部分的指数大，也可以是相同的指数大小。但是，当动量 \vec{k} 接近费米面时，由于费米子的谱函数在复平面存在极点，谱函数将在费米面附近存在一个极大值，这个行为将会改变费米子磁化率随温度变化的性质。取 \vec{k} 位于费米面附近，对于不同的 \vec{K}_l ，有着不同的结果，

3.2.3 费米面附近的贡献

对于 $\vec{K}_l \ll k_F$ 时， \vec{k} 与 $\vec{k} + \vec{K}_l$ 同时位于费米面附近，此时的结果为：

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \sim & \frac{\text{Im}\Sigma_1}{(k - k_F(\omega_2, T) - \text{Re}\Sigma_1)^2 + (\text{Im}\Sigma_1)^2} \frac{\text{Im}\Sigma_2}{(|\vec{k} + \vec{K}_l| - k_F(\omega_1, T) - \text{Re}\Sigma_2)^2 + (\text{Im}\Sigma_2)^2} \\ & \times \left(\Lambda_{01} + T^{-\frac{1}{2}+\nu-2\nu'_{k_F}} b_1 [k - k_F(\omega_2, T)] [|\vec{k} + \vec{K}_l| - k_F(\omega_1, T)] \right) \\ & \left(\Lambda_{02} + T^{-\frac{1}{2}+\nu-2\nu'_{k_F}} b_2 [k - k_F(\omega_2, T)] [|\vec{k} + \vec{K}_l| - k_F(\omega_1, T)] \right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

此时，由于 $\Sigma \sim T^{2\nu_{k_F}}$ 可知， $k - k_F \sim T^{2\nu_{k_F}}$ 的部分将会给出最大的贡献，于是对于 Λ 来说，前面的常数部分 Λ_0 在低温下给出主要贡献，于是，只需要计算如下形

式的积分：

$$G_E = -C\Lambda_0^2 \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} \int k_{\perp}^{d-3} d^2k \rho_B(\omega_1, \vec{k} + \vec{K}_l) \rho_B(\omega_2, \vec{k}) \quad (3.93)$$

对于 $K_l > 2k_F$ 的情形，此时积分中最多只有一个 ρ 处于费米面附近，于是得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \sim & \frac{\text{Im}\Sigma_1}{(k - k_F(\omega_2, T) - \text{Re}\Sigma_1)^2 + (\text{Im}\Sigma_1)^2} \rho_B(\omega_1, \vec{k} + \vec{K}_l) \\ & \times \left(\Lambda_{01} + T^{-\frac{1}{2} + \nu - \nu'_{k_F} - \nu'_{\vec{k} + \vec{K}_l}} b_1[k - k_F(\omega_2, T)] a_+^{(0)}(\vec{k} + \vec{K}_l, \omega_1, T) \right) \\ & \left(\Lambda_{02} + T^{-\frac{1}{2} + \nu - \nu'_{k_F} - \nu'_{\vec{k} + \vec{K}_l}} b_2[k - k_F(\omega_2, T)] a_+^{(0)}(\vec{k} + \vec{K}_l, \omega_1, T) \right) \end{aligned} \quad (3.94)$$

根据前面的分析，依据可以知道 $k - k_F \sim T^{2\nu_{k_F}}$ 的部分将会给出最大的贡献，常数部分 Λ_0 在低温下主导 Λ ，费米面附近对格林函数的贡献依旧可以用(??)表示。对于 K_l 介于0到 $2k_F$ 之间的范围，论证类似。因此接下来我们将重点计算(??)对磁化率的贡献。

因此，对于 $K_l \ll k_F$ 的情形，取 $k - k_F \sim T^{2\nu'_{k_F}}$ ，那么通过积分变量替换可以知道将有：

$$G \sim T^{-2\nu_{k_F}} \quad (3.95)$$

对于 $K_l > 2k_F$ 的情形，由于前面的 $\rho \sim T^{\nu'_k}$ 可知，积分变量替换后将得到结果：

$$G \sim T^{2\nu_{\vec{k} + \vec{K}_l}} \quad (3.96)$$

对于 K_l 介于0到 $2k_F$ 之间的范围，可以预期，在某些角度处，两个 ρ_B 都将接近费米面，这将给出一个较小的正比于 $T^{2\nu_{k_F}}$ 的贡献。

现在，我们来求解费米面附近给出的磁化率的表达式。为此，计算

$$\int k_{\perp}^{d-3} d^2k \rho_B(\omega_1, \vec{k} + \vec{K}_l) \rho_B(\omega_2, \vec{k}) \quad (3.97)$$

首先，对于 $K_l \ll k_F$ ，利用 ρ_B 在费米面附近的结果：

$$\rho_B(\omega, k) = 2\text{Im} \left(\frac{h_1}{k - k_F(\omega, T) - \Sigma} \right) \quad (3.98)$$

上式可以化为

$$-\int \sin^{d-3} \theta d\theta k_F^{d-2} h_1 h_1' dk \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-a^*} \right) \left(\frac{1}{k-b} - \frac{1}{k-b^*} \right) \quad (3.99)$$

其中 a 和 b 分别为

$$a = k_{F_2} + \Sigma_2, \quad b = k_{F_1} + \Sigma_1 - K_l \cos \theta \quad (3.100)$$

利用留数定理，把 k 的积分积掉，可以得到(??)的结果为：

$$\begin{aligned} \int h_1 h_1' k_F^{d-2} \sin^{d-3} \theta d\theta 4\pi \text{Im} \left(\frac{1}{b^* - a} \right) &= 2\pi h_1 k_F^{d-2} \int \sin^{d-3} \theta \rho_B(\omega_1, K_1) \\ &= 2\pi h_1 k_F^{d-2} \int \sin^{d-3} \theta \rho_B(\omega_2, K_2) \end{aligned} \quad (3.101)$$

其中 $K_1 = k_{F_2} + \Sigma_2^* + K_l \cos \theta$ ， $K_2 = k_{F_1} + \Sigma_1^* - K_l \cos \theta$ 。代入 a 和 b 的表达式，得到 $K_l \ll k_F$ 时费米面的磁化率为

$$\begin{aligned} \chi \sim & \frac{-C k_F^{d-2} \Lambda_0^2}{K_l^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} 2\pi h_1 \int \sin^{d-3} \theta \rho_B(\omega_1, K_1) = \\ & \frac{-C k_F^{d-2} \Lambda_0^2}{K_l^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} 2\pi h_1 \int \sin^{d-3} \theta \rho_B(\omega_2, K_2) \end{aligned} \quad (3.102)$$

对于含 $f(\omega_1)$ 的积分，采取第二个表达式，对于含 $f(\omega_2)$ 的积分，采取第一个表达式，并利用谱函数的定义

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho_B(\omega, K)}{\omega - \Omega - i\epsilon} = G^R(\Omega, K) \quad (3.103)$$

得到 $K_l \ll k_F$ 时费米面的磁化率为

$$\chi = \frac{-C k_F^{d-2} \Lambda_0^2}{K_l^2} \int d\theta \sin^{d-3} \theta \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f(\omega + \Omega_l) - f(\omega)}{-\frac{\Omega_l}{v_F} + \Sigma^*(\omega) - \Sigma(\omega + \Omega_l) + K_l \cos \theta} \quad (3.104)$$

对于 $K_l > 2k_F$ 的情形，由于前面的讨论可以知道，积分中的两个谱函数将不

会同时在费米面附近，于是它的结果可以写为：

$$\chi = \frac{-Ck_F^{d-2}\Lambda_0^2}{K_l^2} \int d\theta \sin^{d-3} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} \rho_B(\omega_1, |\vec{k}_{F_2} + \vec{\Sigma}_2^* + \vec{K}_l|) \quad (3.105)$$

这里假设了对于任意的 θ ，两个谱函数的极点都在积分范围内，实际上当 $K_l > k_F$ 时，在 $0 < \theta < 90^\circ$ 时，仅有一个极点，但这并不影响下面得到的温度的指数结果。注意到，上式所选取的是 $\rho_B(\omega_2, \vec{k})$ 的极点，这个积分同样可以利用 $\rho_B(\omega_1, \vec{k} + \vec{K}_l)$ 的极点计算，有

$$\chi = \frac{-Ck_F^{d-2}\Lambda_0^2}{K_l^2} \int d\theta \sin^{d-3} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{f(\omega_1) - f(\omega_2)}{\omega_1 - i\Omega_l - \omega_2} \rho_B(\omega_2, |\vec{k}_{F_1} + \vec{\Sigma}_1^* - \vec{K}_l|) \quad (3.106)$$

于是，对于 ω 的积分， $f(\omega_1)$ 用第二项带入， $f(\omega_2)$ 用第一项带入。在 $K_l > 2k_F$ 的区域，这两部分贡献大致相同。可以得到：

$$\chi = \frac{Ck_F^{d-2}\Lambda_0^2}{K_l^2} \int d\theta \sin^{d-3} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(\omega) \left[G^R(\omega + \Omega_l, k_1) + G^A(\omega - \Omega_l, k_2) \right] \quad (3.107)$$

各个格林函数中的 k 分别为：

$$k_1 = |\vec{k}_F(\omega, T) + \vec{\Sigma}^* + \vec{K}_l|, \quad k_2 = |\vec{k}_F(\omega, T) + \vec{\Sigma}^* - \vec{K}_l| \quad (3.108)$$

所有表达式中 \vec{k}_F 与 $\vec{\Sigma}$ 方向相同，而它们与 \vec{K}_l 夹角为 θ 。

对于 K_l 在0到 $2k_F$ 之间的情形，可以知道，对于角向积分的角度范围内，存在两个谱函数将同时位于费米面附近的情形，这对应于上式中 $|\vec{k}_{F_2} + \vec{\Sigma}_2^* + \vec{K}_l| \sim k_F$ 和 $|\vec{k}_{F_1} + \vec{\Sigma}_1^* - \vec{K}_l| \sim k_F$ ，将上式中的格林函数在这个角度范围内展开到 $\cos \theta$ 的一阶项，有：

$$G^R \sim \frac{h_1}{k_F(\omega) - k_F(\omega + \Omega_l) - \Sigma^* \cos 2\theta_0 - \Sigma(\omega + \Omega_l) - 2Z(\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (3.109)$$

其中 $Z = \cos \theta_0 [k_F + \Sigma^* (\cos 2\theta_0 + 1)]$, $-2k_F(\omega) \cos \theta_0 = K_l$, 以及

$$G^A \sim \frac{h_1}{k_F(\omega) - k_F(\omega - \Omega_l) - \Sigma^* \cos 2\theta'_0 - \Sigma(\omega - \Omega_l) - 2Z(\cos \theta - \cos \theta'_0)} \quad (3.110)$$

其中 $Z = \cos \theta'_0 [k_F + \Sigma^* (\cos 2\theta_0 - 1)]$, $2k_F(\omega) \cos \theta'_0 = K_l$

结论

在这篇论文中，我们简洁地介绍了AdS/CFT对偶性的基本设想——一个量子场论可以用引力理论来加以描述，从而为解决强耦合量子场论提供了一条可能的途径。在第二部分，我们介绍了这个猜想在凝聚态理论上可能的应用，包括粒子/涡线对偶性，（非）费米液体等，说明了它的确可以重现凝聚态物理中很多新奇而难以解决的现象。最后，我们计算了渐近AdS时空的RN黑洞背景下的磁化率，包括规范场部分的贡献和费米子部分的贡献，结果表明他们都出现了温度的指数现象，这可能与重费米子系统有着很强的关系，并可以被用来进一步理解AdS/CFT猜想中，引力理论与量子场论的对应关系。限于时间的限制，很多问题还没来得及讨论，例如在高频率时规范场的响应函数形式，数值解的可能性以及规范场的直接响应和费米子响应随着不同参数改变的相互关系，这些问题可能会对全息原理带来更加深刻的影响。

致谢

感谢提供毕设论文题目的杨义峰老师，他让我了解AdS/CFT对偶性这个充满挑战性和趣味的领域。并且在完成毕业论文的过程中，杨老师帮助我树立了正确的科研态度，让我了解到凝聚态物理理论和实验之间的联系，以及如何在科研中去发现问题和解决问题。同时，杨老师组会上对现今凝聚态各个领域最新发展的关注，扩展了我的视野，加深了我对凝聚态物理的认识。此外我还要感谢郑汗青老师，他作为我未名物理学子班的老师，十分关心我的科研进展，并为我完成了毕业论文的一系列手续。最后还要感谢我的同学钟德亮和李智，和他们的讨论为我在学习和了解弦论这一物理学最艰深的领域提供了重要帮助，而和张亚晖同学的交流则让我进一步熟悉了凝聚态理论特有的方法。

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

(必须装订在提交学校图书馆的印刷本)

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校在 一年 / 两年 / 三年以后在校园网上全文发布。

(保密论文在解密后遵守此规定)

论文作者签名： 导师签名： 日期： 年 月 日